13. TUBİTAK ULUSAL İLKÖĞRETİM MATEMATİK OLİMPİYATI SINAVI 2008

www.sbelian.wordpress.com

2008 yılında yapılan Tübitak İlköğretim Matematik Olimpiyatlarının çözümleri verilmiştir. Her bir çözüm en elementer yöntemler kullanılarak yapılmasına özen gösterilmiştir. Kitapçık 3 bölümden oluşmaktadır. Çoktan Seçmeli Sorular, Klasik Sorular ve Grafikler. Grafikler soru aralarına değil kitapçığın en sonuna (graph. 01 gibi) yerleştirilmiştir.

1 Çoktan Seçmeli Kısım

SORULAR - ÇÖZÜMLER

Soru 1.1 *ABC üçgeninde $G \in [AC]$, $F \in [BG]$, $D \in [AG]$, $E \in [GC]$, $[DF]//[AB]$, $[FE]//[BC]$, $|GF| = |FB|$ ve $|DE| = 13$ ise $|AC|$ kaç birimdir?*

Çözüm. [Graph.01] $|DG| = a$, $|GE| = b$ ise $|DE| = a + b = 13$'tür. $|BF| = |FG|$ ve $[DF]//[AB]$ olduğunda, $GAB \sim GDF$'dir.

$$\frac{|GA|}{|GD|} = \frac{|GB|}{|GF|}$$

eşitliğinden

$$\frac{|GA|}{a} = \frac{2}{1}$$

elde edilir. Buradan da, $|GA| = 2 \cdot a$ eşitliği bulunur. Benzer biçimde, $GBC \sim GFE$'den

$$\frac{|GB|}{|GF|} = \frac{|GC|}{|GE|}$$

eşitliğinden

$$\frac{2}{1} = \frac{|GC|}{b}$$

elde edilir. Buradan da, $|GC| = 2b$ elde edilir. Buna göre, $|AC| = 2 \cdot (a + b)$'den

$$|AC| = 2 \cdot 13 = 26 \text{ bulunur.}$$

Soru 1.2 *Birbirinden farklı x, y gerçel sayıları $x^2 - 2008x = y^2 - 2008y$ eşitliğini sağlıyorsa, $x + y$ kaçtır?*

Çözüm. Verilen eşitliği düzenlersek,

$$\begin{aligned} x^2 - 2008x &= y^2 - 2008y \\ x^2 - y^2 &= 2008x - 2007y \\ (x+y) &= 2008(x-y) \end{aligned}$$

x, y birbirinden farklı birer reel sayı olduğuna göre $x - y \neq 0$'dır. Elde ettiğimiz eşitliğin her iki tarafını $x - y$ ile kısaltırsak $x + y = 2008$ olacaktır.

Soru 1.3 *Ali ile Burcu'nun bazıları siyah, bazıları beyaz olmak üzere toplam* 70 *tane topu vardır. Ali'nin toplarının* $\frac{5}{9}$*'u ve Burcu'nun toplarının* $\frac{7}{17}$*'si siyah ise, Burcunun beyaz top sayısı, Ali'nin Beyaz top sayısından kaç fazladır.*

Çözüm. Ali'nin toplarının sayısına $9x$ dersek, bunların $5x$ tanesi siyah $4x$ tanesi beyaz olacaktır. Burcunun toplarının sayısı $17y$ ise, $7y$ tanesi siyah ve $10y$ tanesi beyaz olur. Buna göre, tüm topların sayısı

$$9 \cdot x + 17 \cdot y = 70$$

olacaktır. Topların sayısı birer tamsayı olacağına göre, (Denklem bir Diyafont denklemi olduğundan Euclide Algoritması'da kullanılabilirdi.) $a = 4$ ve $b = 2$ için denklemin sağlanacağını görmek zor değildir. Bu durumda, Burcu'nun beyaz top sayısı, Ali'nin beyaz top sayısından,

$$10y - 4x = 10 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 4$$

eşitliğinden 4 fazla olduğu görülecektir.

Soru 1.4 *ADE üçgenin de $B \in [AE]$, $C \in [DE]$ noktaları $ABCD$ kirişler dörtgeni olarak seçilsin. $[BD] \cap [AC] = \{F\}$, $s(\widehat{EAC}) = 21^\circ$ ve $s(\widehat{AED}) = 33^\circ$ ise, $s(\widehat{AFD})$ kaç derecedir?*

Çözüm. **[Graph.02]** AEC üçgeninde dış çember özelliğinden,

$$s(\widehat{ACD}) = s(\widehat{AEC}) + s(\widehat{EAC})$$

olduğu açıktır. Buna göre,

$$s(\widehat{ACD}) = 33^\circ + 21^\circ = 54^\circ$$

olacaktır. $ABCD$ kirişler dörtgeninde BC yayını gören çevre açıların eşitliğinden,

$$s(\widehat{BDC}) = s(\widehat{BAC}) = 21^\circ$$

olur. AFD açısı, FDC üçgeninin bir dış açısı olduğuna göre,

$$s(\widehat{AFD}) = s(\widehat{FCD}) + s(\widehat{FDC})$$

eşitliğinden,

$$s(\widehat{AFD}) = 54^\circ + 21^\circ = 75^\circ$$

olarak bulunur.

Soru 1.5 *Farklı n sayı çember üzerinde, her sayı iki komşusunun çarpımına eşit olacak şekilde dizilebildiğine göre n en fazla kaç olabilir?*

Çözüm.[Graph.03] İlk iki sayı $a \neq 1$ ve $a \neq b$ olmak üzere a ve b olsun. Buna göre,

- Üçüncü sayıya, c dersek $b = c \cdot a$ ve $c = \frac{b}{a}$ olur.
- Dördüncü sayı d ise $\frac{b}{a} = d \cdot b$ ve $d = \frac{1}{a}$ olur.
- Beşinci sayı e ise $\frac{1}{a} = e \cdot \frac{b}{a}$ ve $e = \frac{1}{b}$ olur.
- Altıncı sayı f ise $\frac{1}{b} = f \cdot \frac{1}{a}$ ve $f = \frac{a}{b}$ olur.
- Yedinci sayı g ise $\frac{a}{b} = g \cdot \frac{1}{b}$ ve $g = a$ olur. Ancak bu sayı ilk sayı ile çakışır.

Buna göre, çember etrafıa verilen koşullarla,

$$a, b, \frac{b}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{a}{b}$$

olmak üzere, $n = 6$ değerini alabilir.

Soru 1.6 *Yanyana yazılmış* 123456789 *rakamlarından bazılarının arasına* + *işareti koyularak oluşturulan bir toplam*

$$144, 153, 189, 375, 486$$

değerlerinden hangisi olamaz?

Çözüm. 123456789 rakamlarının bazılarının arasına + işareti koyarak oluşturacağımız her toplamın 9 ile bölünebileceği açıktır. Verilen sayılar incelenirse, bunlardan sadece 375 sayısının 9 ile kalansız bölnemediği görülecektir. Buna göre, istenen sayı 375 olmalıdır. Eğer işlemi biraz daha ilerletirsek;

$$\begin{aligned} 1+2+3+45+6+78+9 &= 144, \\ 1+2+3+45+6+7+89 &= 153, \\ 12+34+56+78+9 &= 189, \\ 1+2+3+456+7+8+9 &= 486 \end{aligned}$$

değerlerini hesaplayabiliriz.

Soru 1.7 *AB ve CD tabanlı bir $ABCD$ yamuğunun AD kenarı üzerinde P_1, P_2, P_3, P_4 ve BC kenarı üzerinde Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 noktaları,*

$$AB // P_1Q_1 // P_2Q_2 // P_3Q_3 // P_4Q_4 // DC$$

ve

$$A(ABQ_1P_1) = A(P_1Q_1Q_2P_2) = A(P_2Q_2Q_3P_3) = A(P_3Q_3Q_4P_4) = A(P_4Q_4CD)$$

olacak şekilde seçiliyor. $|AB| = 1$, $|P_1Q_1| = 2$ *ise,* $|CD|$ *kaçtır?*

Çözüm. [**graph.04**] DA ve CB ışınlarının kesişim noktası E olsun. Ayrıca,

$$EAB \sim EP_1Q \text{ Açı-Açı Benzerliği}$$

ve $A(EAB) = m$ birimkare olsun. Buna göre,

$$\frac{A(EAB)}{EP_1Q_1} = (\frac{|AB|}{|P_1Q|})^2 = \frac{1}{4}$$

,

$$\frac{m}{A(EP_1Q)} = \frac{1}{4}$$

ise $A(ABQ_1P_1) = 3m$ ve $A(ADC) = m + 5 \cdot 3m = 16m$ birimkaredir. Benzer biçimde

$$EDC \sim EAB \text{ Açı-Açı Benzerliği}$$

olduğundan,

$$\frac{A(EDC)}{EAB} = (\frac{|DC|}{|AB|})^2$$

,

$$\frac{16m}{m} = (\frac{|DC|}{|AB|})^2$$

ifadesinden

$$\frac{|DC|^2}{1^2} = 16$$

ise $|DC| = 4$ olur.

Soru 1.8

$$\frac{b+2c-a}{2bc} + \frac{a+2c-b}{2ac} + \frac{a+b-2c}{ab}$$

olduğuna göre,

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{10c^2+4ab}$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Çözüm. Soruda verilen kesirlerin paydaları abc olacak şekilde eşitlenirse,

$$\begin{aligned} ab + 2ac - a^2 + ab + 2bc - b^2 &= 2ac + 2bc - 4c^2 \quad (1) \\ a^2 + b^2 &= 4c^2 + 2ab \text{ bulunur.} \quad (2) \end{aligned}$$

Soruda istenen ifade de (2) yerine koyulursa,

$$\frac{5c^2 + 2ab}{2(5c^2 + 2ab)} = \frac{1}{2}$$

cevabı bulunur.

Soru 1.9 *Beş tane 2 basamaklı birbirinden farklı doğal sayının toplamının alabileceği kaç farklı değer vardır?*

Çözüm. İki basamaklı sayıların en küçüğü 11 ve en büyüğü 99 sayılarıdır. İstenen sayılar birbirinden farklı olduğuna göre, bulabileceğimiz en küçük toplam $10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60$ ve en büyük toplam $95+96+97+98+99 = 485$ olarak bulunur. Buna göre, beş sayının toplamı $60, 61, 62, \cdots, 485$ olabilir. Demek ki, koşulu sağlayan $485 - 59 = 426$ farklı duru vardır.

Soru 1.10 *Kenar uzunluğu 1 olan $ABCD$ karesinin sırasıyla, AB, BC, CD, DA kenarları üzerinde*

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'| = \frac{1}{3}$$

şartını sağlayan A', B', C', D' noktaları seçiliyor. AC', $A'C$, BD' ve $B'D$ doğrularının sınırladığı karenin alanı kaçtır?

Çözüm. [**graph.05**] $AKB \sim A'LB$ benzerliğinden

$$\frac{A(AKB)}{A(A'LB)} = (\frac{3a}{2a})^2 = \frac{9}{4}$$

olur. $A(A'LB) = 4x$ ise $A(AA'LK) = 5x$'tir. Benzer şekilde,

$$A(AKD') = A(DNC') = A(CMB') = A(BLA') = 4x$$

ve

$$A(DNKD') = A(CMNC') = A(BLMB') = A(AKLA') = 5x$$

olur. $A(ABCD) = S$ ise

$$A(A'BC) = S \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \text{ ve } 13x = \frac{5}{3} \text{ ten}$$

$S = 39 \cdot x$'tir. $A(KLMN) = 39x - (4 \cdot 5x + 4 \cdot 4x) = 3x$ bulunur. $|AB| = 1$ ise

$$A(ABCD) = 1^2 = 1$$

ve $39x = 1$'den $x = \frac{1}{39}$ olur. Buna göre,

$$A(KLMN) = 3 \cdot x = 3 \cdot \frac{1}{39} = \frac{1}{13}\text{'tür.}$$

Soru 1.11 *1000'den küçük kaç n doğal sayısı için $n^2 + 8n - 85$ ifadesi 101 ile tam bölünür?*

Çözüm. İfade 101 ile tam bölünebildiğine göre, ifadeyi

$$n^2 + 8n - 85 = 101 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

şeklinde yazabiliriz. Buna göre,

$$\begin{aligned} n^2 + 8n + 16 - 101 &= 101 \cdot k \\ (n+4)^2 &= 101 \cdot (k+1) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Görüldüğü gibi, eşitliğin sol tarafı n doğals sayısı için tamkaredir. Buna göre, $(k+1)$ çarpanı t doğal sayıları için,

$$k + 1 = 101 \cdot t^2$$

olmalıdır. $(n+4)^2 = 101 \cdot 101 \cdot t^2$ eşitliğinden $n + 4 = 101 \cdot t$ ve $n < 1000$ için t değeri $[1, 9]$ aralığında bir tamsayı değeri olacaktır. Bu durumda 9 tane n doğal sayısı için $n^2 + 8n - 85$ ifadesi 101 ile tam bölünür.

Soru 1.12 *A şehri B şehrinin 60 km batısındadır. A'dan bir araba ve B'den ikinci bir araba aynı anda doğuya doğru yola çıkıyorlar. Bir süre sonra birinci araba ikinciye yetişiyor. Birinci arabanın hızı 10 km/saat, ikinci arabanın hızı 8 km/saat daha fazla olsaydı, birinci araba, ikinci arabayı, aynı yerde fakat 1 saat daha erken yakalayacaktı. Birinci arabanın hızı kaç km/saat'tir?*

Çözüm. **[graph.06]** Hızları sırasıyla V_1, V_2 ve hız farkı $V_1 - V_2 = V$ $km/saat$ olsun. Birinci araba t saat sonra ikinciye C'de yetişmiş ise, $V \cdot t = 60$ ve $t = \frac{60}{V}$'dir.

$$(V_1 + 10) - (V_2 + 8) = V_1 - V_2 + 2 = V + 2\text{'dir.}$$

$(V + 2)(t - 1) = 60$'tan $V^2 + 2V - 120 = 0$, $(V + 12)(V - 10) = 0$ ve $V = 10$ $km/saat$ bulunur. $V \cdot t = 60$ olduğundan $10 \cdot t = 60$ ve $t = 6$ saattir. İkinci durumda ki zaman $6 - 1 = 5$ saat olacaktır.

$$|BC| = V_2 \cdot 6 = (V_2 + 8) \cdot 5$$

ifadesinden $V_2 = 40$ $km/saat$ olur. Buna göre, $V_2 - V_1 = V$ eşitliğinden, $V_1 - 40 = 10$ ve $V_1 = 50$ $km/saat$ bulunur.

Soru 1.13 *ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC|$ ve $s(\widehat{A}) = 50°$'dir. Bu üçgenin AC kenarı ve AD kenarortayı üzerinde, sırasıyla, C ve D'den farklı N ve M noktaları $|MN| = |MB|$ olacak biçimde alınmıştır. $\widehat{MBN}$ açısı kaç derecedir?*

Çözüm. **[graph.07]** ABC üçgeninde $|AB| = |AC|$ olduğundan, $[AD]$ kenarortayı hem yükseklik hem de açıortaydır. $|BD| = |DC|$ ve $[AD] \perp [BC]$ olduğundan $ABC \sim MDC$ (K.A.K) ve $|MB| = |MC|$'dir. $|MB| = |MN|$ verildiğinden, $|MB| = |MN| = |MC|$ ve MBC, MCN, MNB üçgenleri ikizkenar üçgenlerdir. ABC üçgeninde

$$S(\widehat{ACB}) = y + z = \frac{180° - 50°}{2} = 65°$$

sonucu bulunur. NBC üçgeninde, $2x+2y+2z = 180°$ eşitliğinden $x+y+z = 90°$ ve $x+65° = 90°$ ise $S(\widehat{MBN}) = x = 25°$ bulunur.

Soru 1.14 *Kenar uzunluğu n birim olan bir kübün yüzleri boyanıyor, ve küp, n^3 adet birim küp olacak şekilde parçalanıyor. Kaç $n \geq 2$ değeri için, tek yüzü boyanmış birim küplerin sayısı, hiç boyanmamış birim küplerin sayısına eşit olur?*

Çözüm. **[graph.08]** Tek yüzü boyanmış olan küpler ayrıtı $n-2$ birim olan $ABCD$ kare tabanlı küplerdir. Küpün 6 yüzünde tek yüzü boyanmış $6 \cdot (n-2)^2$ tane küp vardır. Hiç boyanmamış küpler ise şekildeki **[graph.08]** küpün içinde kalan bir kenarı $(n-2)$ birim olan küptür. Buna göre,

$$(n-2)^3 = 6 \cdot (n-2)^2$$

olacağından $(n-2)^2 \cdot (n-8) = 0$ eşitliğinden n değeri 2 veya 8 bulunur.

- $n = 2$ için $6 \cdot (2-2) = 0$ olacağından tek yüzü boyanmış, 0 adet küp ve içeride boyanmamış $(2-2)^3 = 0$ adet küp vardır.
- $n = 8$ için tek yüzü boyanmış $6 \cdot (8-2)^3 = 216$ ve boyanmamış $(8-2)^3 = 216$ küp vardır.

Soru 1.15 *Ahmet tahtaya, herhangi ikisinin farkı iki eşit rakamdan oluşan bir sayı olmayacak şekilde, en fazla kaç iki basamaklı sayı yazabilir?*

Çözüm. Ahmet, en büyüğünün farkı ile en küçüğünün farkı en çok 10 olacak şekilde ardışık

$$10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$$

veya

$$44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54$$

örneklerinde olduğu gibi en çok 11 tane iki basamaklı sayı yazabilir. Buna göre,

$$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

kümesinin iki basamaklı sylardaki tümleyeni $A' = \{21, 22, \cdots, 99\}$ olacaktır. A' kümesinin hangi elemanını seçersek seçelim, A kümesindeki bir elemanla arasındaki fark 11'in katı olacaktır. Buna göre, Ali'nin yazabileceği en büyük küme en fazla 11 elemanlı olacaktır.

Soru 1.16 *Kare şekinde bir kağıdın üzerine 1 birim yarıçaplı bir çember nasıl çizilirse çizilsin, özdeş bir çemberin daha, ilk çemberle en fazla bir noktada kesişerek çizilebilmesi için kağıdın kenar uzunluğunun en az kaç birim olması gerekir?*

Çözüm. [**graph.09**] En uç durum 1 birim yarıçaplı özdeş çemberin karenin bir köşesinden geçen komşu iki kenara teğet olmasıdır. Bu durumda, A, B, C, D köşeleri için 4 tane özdeş çember vardır. $[AC] \cap [BD] = \{O\}$ olmak üzere, ilk çemberimiz O merkezli 1 birim yarıçaplı çemberdir. AHD dik üçgeninde

$$|AD|^2 = |AH|^2 + |DH|^2$$

eşitliğinden $|AD| = \sqrt{2}$ birim ve $|OA| = 2 + \sqrt{2}$ birimdir. Bu durumda, karenin kenar uzunluğu en az

$$|AB| = \sqrt{2} \cdot (2 + \sqrt{2}) = 2 \cdot (\sqrt{2} + 1)$$

olacaktır.

Soru 1.17 *x, y, z gerçel sayıları*

$$\begin{aligned} x &= z^2 - 2|z| \quad (3) \\ y &= x^2 - 2|x| \quad (4) \\ z &= y^2 - 2|y| \quad (5) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlıyorsa, $x + y + z$ toplamının alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm. Soruda verilen [3], [4] ve [5] eşitliklerindeki değişkenler olan x, y, z değerlerinin toplamının en küçük olması için bu üç değerinde negatif değerler olması gerekir. Bu durumda, [3], [4] ve [5] eşitlikleri, x, y, z gerçel sayıları

$$\begin{aligned} x &= z^2 + 2z \quad (6) \\ y &= x^2 + 2x \quad (7) \\ z &= y^2 + 2y \quad (8) \end{aligned}$$

olacaktır. Eğer [6], [7] ve [8] eşitliklerinde, eşitliğin her iki tarafınada 1 eklenirse,

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= y + 1\text{'den, } (x+1)^2 = y + 1 \text{ için } x = -1, y = -1, \\ y^2 + 2y + 1 &= z + 1\text{'den, } (y+1)^2 = z + 1 \text{ için } y = -1, z = -1, \\ z^2 + 2z + 1 &= x + 1\text{'den, } (z+1)^2 = x + 1 \text{ için } z = 1, z = 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buna göre $(x + y + z)_{\min} = -3$ olarak bulunur.

Çözüm II. Varsayalım $x \geq y \geq z$ olsun. Buna göre, $x \geq y$ ise, $z^2 + 2z \geq x^2 + 2x$ ve $(z + x) \geq -2$ olacaktır. Benzer biçimde, $(z + y) \geq -2$ ve $(x + y) \geq -2$ olacaktır. Bu üç ifade taraf tarafa toplanırsa,

$$x + y + z \geq -3$$

olduğu görülecektir.

Soru 1.18 *Öğretmen, tahtaya 8 pozitif tamsayı yazıyor, ve Betül bu sayılardan ikisinin 2'ye, üçünün 3'e, dördünün 4'e, beşinin 5'e, altısının 6'ya, yedisinin 7'ye ve sekizinin 8'e bölündüğünü söylüyor. Betül en az kaç hata yapmıştır?*

Çözüm. Sayıların sekiz tanesi 8 ile tam bölünebiliyorsa, Her bir sayı,

$$8k_1, 8k_2, 8k_3, 8k_4, 8k_5, 8k_6, 8k_7, 8k_8 \qquad k_i \in \mathbb{Z}$$

formatında olacaktır. Bu sayıların hepsinin 2 ve 4 ile bölünebildiği açıktır. Sayılardan altı tanesi 6 ile kalansız bölenebiliyor olduğuna göre bu altı sayı 3 ilede kalansız bölünebilir. Bu durumda Betül en az, 3 hata yapmıştır. Eğer bu durumu örneklemek istersek,

$$8, 56, 168, 840, 1680, 2520, 3360, 4200$$

sayılarını alabiliriz. Buna göre,

- Tümü 8 ile kalansız bölünebilir.
- 8 hariç diğer yedi tanesi 7'ye
- 8 ve 56 hariç diğer altı tanesi 6'ya
- $8, 56$ ve 168 hariç diğer beş tanesi 5'e tam bölünür.

Soru 1.19 *B açısı dik olan ABC dik üçgeninde $[BD]$ kenarortayının uzantısı ile $[AC]$'ye A noktasında dik olan bir d doğrusunun kesişme noktası E'dir. $s(\widehat{AEB}) = 18°$ ve $|AB| = 12$ olduğuna göre, $|DE|$ kaç birimdir?*

Çözüm. **[graph.10]** $s(\widehat{AEB}) = 18°$ olduğundan, AED dik üçgeninde

$$s(\widehat{ADE}) = 90° - 18° = 72°$$

olur. ADB üçgeni ikizkenar olduğundan,

$$s(DAB) = s(DBA) = \frac{72°}{2} = 36°$$

olacaktır. $[DE]$'nin orta noktasına K diyelim. ADE dik üçgeninde,

$$|AK| = |KD| = |KE|$$

olduğundan $s(\widehat{AEK}) = s(\widehat{EAK}) = 18°$ ve $s(\widehat{AKB}) = 2 \cdot 18° = 36°$'dir. Bu durumda, $s(\widehat{ABK}) = s(\widehat{AKB}) = 36°$, $|AB| = |AK| = 12$ ve

$$|DE| = 2 \cdot |AK| = 2 \cdot 12 = 24$$

olur.

Not 1.20 (Soru 1.19) *Bu çözüm $|AB| > |BC|$ için doğrudur. Eğer,*

- *$|AB| < |BC|$ ise $|DE| \neq 24$ olacaktır.*

- $|AB| = |BC|$ *ise* BD *ışını ile* A *noktasından* $[AC]$*'ye çizilen dikme paralel olacağından* E *noktası bulunamaz.*

Soru 1.21 $a = -\frac{9}{10}$ *ve* $b = (a+1)(a^2+1)(a^4+1)$ *ise* $19b + 10a^8$ *kaçtır?*

Çözüm. $b = (a+1)(a^2+1)(a^4+1)$ eşitliğinin iki tarfınıda $(a-1)$ ile çarparsak,

$$\begin{aligned} b(a-1) &= (a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1) \\ &= a^8 - 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$a = -\frac{9}{10}$ ise $a - 1 = -\frac{19}{10}$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} b \cdot -\frac{19}{10} &= a^8 - 1 \\ -19b &= 10a^8 - 10 \end{aligned}$$

olacağından, istenen cevap $19b + 10a^8 = 10$ olacaktır.

Soru 1.22 *n ve $n+1$ pozitif tamsayılarının her ikisininde rakamlarının toplamı 53'e bölünebiliyorsa, n en az kaç basamaklıdır?*

Çözüm. n sayısının rakamları toplamı 106 ve $n+1$ sayısının rakamları toplamı 53 olacak şekilde iki tamsayı bulmaya çalışalım. Buna göre, $n+1$ için

$$5 \cdot 9 + 8 = 53$$

olduğundan,

$$n + 1 = 99999800 \cdots 0$$

sayısınıda yazabiliriz. Buna göre n sayısının basamakları toplamı 106 olacağına göre,

$$5 \cdot 9 + 7 + k \cdot 9 = 106$$

eşitliğinden k tamsayı değeri 6 olarak bulunur. Buna göre, n sayısı

$$999997999999$$

ve $n+1$ sayısıda

$$n + 1 = 999998000000$$

olarak bulunur. Demek ki, n sayısı en az 12 basamaklı olacaktır.

2 Klasik Kısım

SORULAR - ÇÖZÜMLER

Soru 2.1 *ABC dik üçgeninde $s(\widehat{C}) = 90°$ olmak üzere, D ile içteğet çemberinin merkezini gösterelim. A ve D noktalarından geçen doğrunun $|CB|$ kenarı ile kesişim noktası N olsun. $|CA| + |AD| = |CB|$ ve $|CN| = 2$ ise $|NB|$ kaç birimdir?*

Çözüm. [graph. 11] İç teğet çemberin $[AC]$ ve $[BC]$ kenarlarına değme noktaları sırasıyla E ve F olsun. $FCED$ karesinin kenar uzunlukları r olsun. ADE dik üçgeninde $|AD| = x$, $|AE| = y$ ve $s(\widehat{BAN}) = s(\widehat{CAN}) = \alpha$ olsun. $[CB]$ üzerinde $|FG| = |EA| = y$ alırsak, $FDG \sim EDA$ (K.A.K.) eşliğinden $m(\widehat{DGF}) = \alpha$ ve $|DG| = |DA| = x$ olur.

$|CA| + |AD| = |CB|$ eşitliğinde $|CB| = |BG| + |GC|$ yazalım. $|CA| + |AD| = |BG| + |GC|$, $|CA| = |GC| = y+r$ olduğundan, $y+r+|AD| = |BG|+y+r$ eşitliğinden $|AD| = |BG| = x$ olur. $|GB| = |GD| = x$ olduğundan $s(\widehat{DBG}) = s(\widehat{BDG}) = \beta$ ve GDB üçgeninde dış açı özeliğinden, $\beta + \beta = \alpha$ yani $2\alpha = \beta$ olur.

D noktası iç teğet çemberin merkezi olduğundan,

$$s(\widehat{DBA}) = s(\widehat{DBC}) = \beta$$

ve $s(ABC) = 2\beta = \alpha$'dır. ABC dik üçgeninde,

$$s(\widehat{BAC}) + s(\widehat{ABC}) = 90°$$

ise $2\alpha + \alpha = 90°$ eşitliğinden, $\alpha = 30°$ olur.

ANC dik üçgeninde, $s(\widehat{NAC}) = 30°$ ve $|NC| = 2$ olduğundan $|AN| = 2 \cdot 2 = 4$ olur. NAB üçgeninde, $s(\widehat{NBA}) = 2\beta = \alpha = 30°$ ve $s(\widehat{NAB}) = \alpha = 30°$ olduğundan $|NA| = |AN| = 4$ bulunur.

Soru 2.2 $4^x + 3^y = z^2$ *denkleminin pozitif tamsayılar kümesindeki tüm çözümlerini bulunuz.*

Çözüm. $4^x + 3^y = z^2$ eşitliğinden,

$$3^y = z^2 - 2^{2x} = (z - 2^x)(z + 2^x)$$

eşitliğini elde edebiliriz. a ve b birer tamsayı olmak üzere, $z - 2^x = 3^a$ ve $z + 2^x = 3^{a+b}$ olsun.

$$(z + 2^x) - (z - 2^x) = 3^{a+b} - 3^a$$

eşitliğinden $2^{x+1} = 3^a(3^b - 1)$ elde edilir.

2^{x+1} sayısı $x > 0$ için 3 ile bölünemez. Bu yüzden, $a = 0$ olmalıdır. Bu durumda, $2^{x+1} = 3^b - 1$ eşitliği elde edilir. $b = 2k$ olmak üzere, $b = 2k$ ise, $2^{x+1} = 3^{2k} - 1$ ve $2^{x+1} = (3^k - 1)(3^k + 1)$'dir. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için, m ve n tamsayılar olmak üzere, $3^k - 1 = 2^m$, $3^k + 1 = 2^n$ olmalıdır. Yani, $k = 1$ için, $3^1 - 1 = 2$, $3^1 + 1 = 2^2$ ve $b = 2k = 2$ olmalıdır. $b = 2$ ise $2^{x+1} = 3^2 - 1$'den $x = 2$ bulunur.

$2^{x+1} = 3^b - 1$ eşitliğinde, b tek bir tam sayı olsun. Buna göre,

$$2^{x+1} = (3 - 1)(3^{b-1} + 3^{b-2} + \cdots + 3^1 + 3^0)$$

eşitliğinde $3 - 1 = 2$'dir. Ancak,

$$A = 3^{b-1} + 3^{b-2} + \cdots + 3^1 + 3^0$$

ifadesinde tek sayıda terim vardır. Yani A tek sayıdır. Demek ki,

$$2^{x+1} \neq 2(3^{b-1} + 3^{b-2} + \cdots + 3^1 + 3^0)$$

olacaktır.

$z - 2^x = 3^a$ ve $z + 2^x = 3^{a+b}$ için $a = 0$, $b = 2$, $x = 2$ bulmuştuk. Buna göre, $z - 2^2 = 3^0$ eşitliğinden $z = 5$ bulunur. $4^x + 3^y = z^2$ eşitliğinde, $x = 2$ ve $z = 5$ yazarsak,

$$4^2 + 3^y = 5^2$$

eşitliğinden $y = 2$ bulunur.

O halde, verilen denklemin

$$(x, y, z) = (2, 2, 5)$$

olacak şekilde, tek çözümü vardır.

Soru 2.3 *Bir masa üzerindeki* 24 *tane bardaktan, tam olarak* 3 *tanesi ters çevrilmiştir. Her işlemde herhangi* 4 *bardağı çevirebiliyoruz. En fazla* 100 *işlem yaparak bütün bardakları düz hale getirebilirmiyiz.*

Çözüm. Düz bardakları $+1$ ve ters bardakları -1 ile gösterelim. Başlangıçta toplam

$$21 \cdot (+1) + 3 \cdot (-1) = 18$$

ve

$$18 \equiv 2(mod4)$$

olacaktır. Her işlemde bir bardak ters çevrildiğinde

$$(+1) - (-1) = 2 \text{ veya } (-1) - (+1) = -2$$

olduğundan toplamdaki değişim 2 veya -2'dir. Buna göre, her işlemde 4 bardağın çevrilmesinde,

$$\begin{aligned} +2+2+2+2 &= 8 \equiv 0(mod4) \\ +2+2+2-2 &= 4 \equiv 0(mod4) \\ +2+2-2-2 &= 0 \equiv 0(mod4) \\ +2-2-2-2 &= -4 \equiv 0(mod4) \\ -2-2-2-2 &= -8 \equiv 0(mod4) \end{aligned}$$

durumlarından biri oluşur. 24 bardağında düz duruma gelmesi için,

$$24 \cdot (+1) \equiv 0(mod4)$$

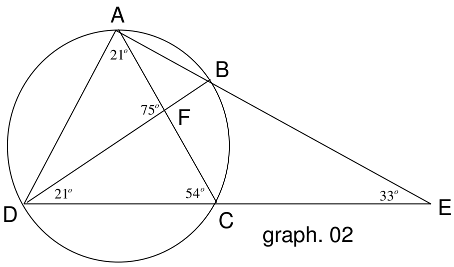
olmalıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned} 18 &\equiv 2(mod4) \quad (9) \\ 4k &\equiv 0(mod4), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (10) \end{aligned}$$

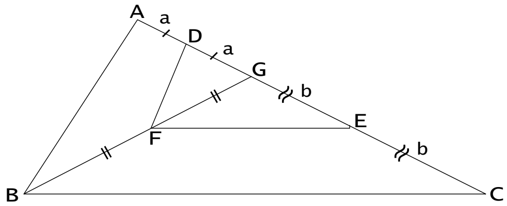
sisteminde [9] ve [10] ifadelerini toplayıp $(mod4)$ altında incelersek hiçbir zaman 0 kalanının olamayacığını görmek zor değildir. Demek ki,

$$24 \equiv 0(mod4)$$

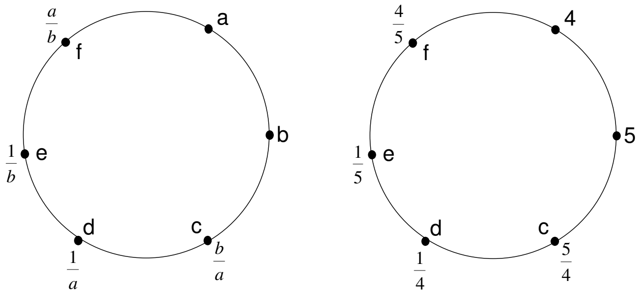
durumu oluşturulamaz. Sonuç olarak, verilen koşullarda bütün bardaklar düz hale getirilemez.



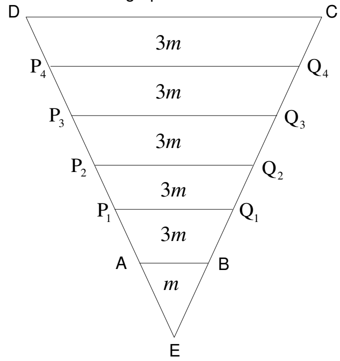
graph. 02

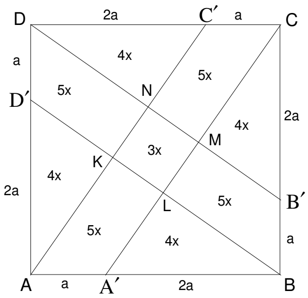


graph. 01

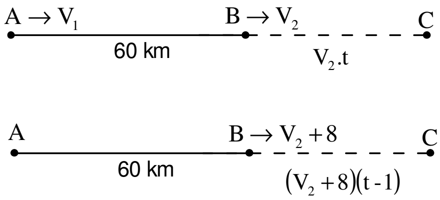


graph. 03

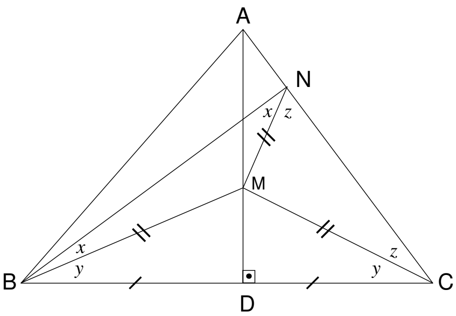
graph. 04




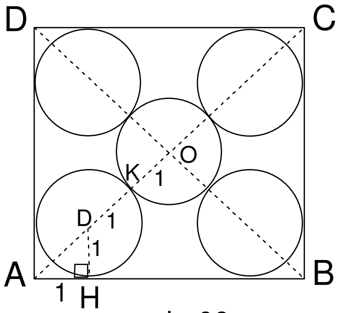
graph. 05



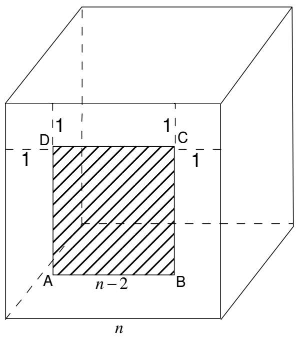
graph. 06



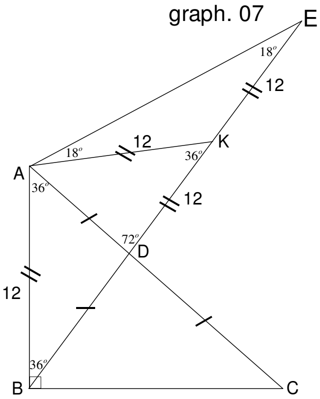
graph. 07



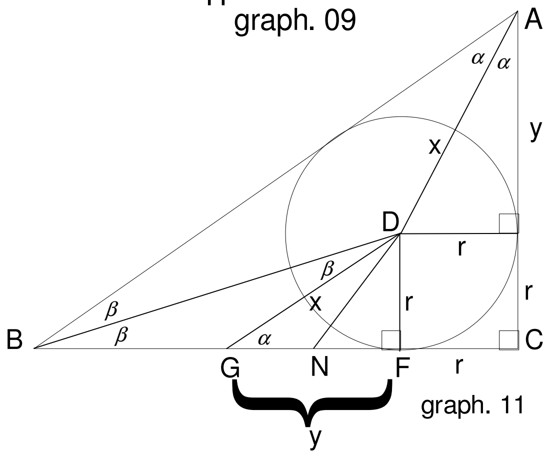
graph. 09



graph. 08



graph. 10



graph. 11