Barbut

Ali Nesin

Oyunlarımdan sıkılan okurlardan – eğer varsa – özür dilerim. Ne yapalım ki ben oyun oynamayı çok severim.

Birinci Oyun. İki oyuncu sırayla zar atıyorlar. Şeş (6) atan ilk oyuncu oyunu kazanıyor. Ve oyun iki oyuncudan biri şeş atana dek devam ediyor.

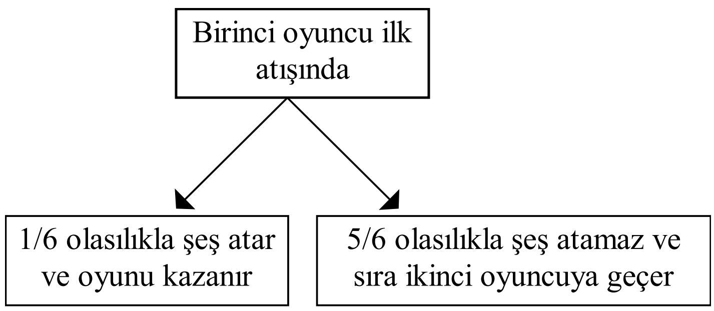
Bu oyunda oyuna başlayananın bir avantajı vardır. Yani birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı 1/2'den daha fazladır. İkinci oyuncunun da kazanma olasılığı 1/2'den azdır elbet.

Herhangi bir kuşku olmaması için belirteyim: Oyunda bir zar var ve her oyuncu sırası geldiğinde bir kez zar atıyor. Ve zar hilesiz... Ve kimse zar tutmuyor. Bir başka deyişle, 1'den 6'ya kadar herhangi bir sayının (örneğin 5'in) gelme olasılığı 1/6'dır. Ve elbette 7 gelme olasılığı sıfırdır!

Hiç kimse şeş atamazsa bu oyun sonsuza dek sürebilir, ama sonsuza dek kimseye şeş gelmeme olasılığı sıfırdır. Yani bu oyun kuramsal olarak bitmezmiş gibi görünse de uygulamada hep biter. Deneyin, oyunun hep bittiğini göreceksiniz, hiçbir oyun sonsuza dek sürmeyecektir! Örneğin, oyunun ilk on atışta bitmeme olasılığı 0,1615056...'dır, yani aşağı yukarı yüzde 16'dır. İlk yirmi atışta bitmeme olasılığı yüzde 2,6'dan biraz fazla ve ilk 100 atışta bitmeme olasılığı milyarda 12 civarındadır... Genel olarak, oyunun ilk n atışta bitmeme olasılığı $(5/6)^n$ dir. Dolayısıyla oyunun sonsuza dek bitmeme olasılığı sıfırdır[1]. Bir başka deyişle, 1 olasılıkla (yani yüzde yüz bir kesinlikle) oyun sonlu bir zaman sonra bitecektir.

Birinci oyuncunun bu şeş atma oyununu kazanma olasılığı kaçtır?

Birinci oyuncunun kazanma olasılığına a diyelim. Bu a sayısını hesaplamak istiyoruz.



Birinci oyuncu, kazanırsa, ya ilk atışında kazanacaktır ya da daha sonraki atışlarında. Hesaplamak istediğimiz a olasılığı, birinci oyuncunun ilk atışında kazanma olasılığıyla daha sonra kazanma olasılığının toplamıdır. Birinci oyuncunun ilk atışında kazanma olasılığı 1/6'dır elbet. Peki ya daha sonra kazanma olasılığı kaçtır?

Birinci oyuncu, 5/6 olasılıkla oyunu ilk atışında kazanamaz ve sıra ikinci oyuncuya geçer. İkinci oyuncu, şimdi oyunun birinci oyuncusu olmuştur ve bu andan itibaren oyunu kazanma olasılığı a'dır, demek ki bu andan itibaren oyunu kaybetme olasılığı $1-a$'dır. Yani birinci oyuncunun oyunu birinci atıştan sonra kazanma olasılığı

$$5/6 \times (1-a)$$

1 **Matematik ve Oyun** adlı kitabımdaki *Yakınsamak* adlı yazıya bakınız.

dır.

Hesaplamak istediğimiz a sayısı 1/6'yla $5/6\times(1-a)$ sayılarının toplamıdır:

$$a = 1/6 + 5/6\times(1-a).$$

Bu denklemi kolaylıkla çözüp a'yı bulabiliriz:

$$a = 6/11.$$

Görüldüğü gibi, a, 1/2'den biraz fazla.

Soruyu bir başka yöntemle de çözebiliriz. a, gene birinci oyuncunun kazanma olasılığı olsun. O zaman ikinci oyuncunun kazanma olasılığı $5a/6$'dır (birinci oyuncu 5/6 olasılıkla ilk atışında şeş atamayacaktır ve ikinci oyuncu oyuna birinci oyuncuymuş gibi devam edecektir.) Bu iki olasılığın toplamı 1 etmelidir (oyunu iki oyuncudan biri kazanmalıdır.) Yani,

$$a + 5a/6 = 1$$

olmalıdır. Bu denklemi çözerek gene (ve iyi ki!) $a = 6/11$ buluruz.

Bu sonuç, sonsuz bir toplam hesaplanarak da elde edilebilir. Ama ne gerek var!

İkinci Oyun. Ya aynı oyunu üç oyuncu oynarsa? Birinci ve ikinci oyuncunun kazanma olasılıkları kaçtır? En çok kazanma şansı olan birinci oyuncudur elbet. İkinci oyuncunun kazanma şansı daha azdır. Hele üçüncü oyuncunun kazanma şansı daha da azdır.

Birinci oyuncunun kazanma olasılığı 1/3'ten fazla, üçüncü oyuncunun kazanma olasılığı 1/3'ten az olmalı elbet. İkinci oyuncunun kazanma olasılığının 1/3 olduğunu düşünüyorsanız yanılıyorsunuz. Her nedense ikinci oyuncunun kazanma olasılığı 1/3'ten biraz daha az.

Gene birinci oyuncunun kazanma olasılığına a diyelim. O zaman ikinci oyuncunun kazanma olasılığı (yukardaki gibi) $5a/6$'dır. Birinci ve ikinci oyuncu şeş atamazlarsa – ki $(5/6)^2$ olasılıkla ilk iki oyuncu şeş atamazlar – sıra üçüncü oyuncuya gelecektir. Dolayısıyla üçüncü oyuncu $(5/6)^2a$ olasılıkla oyunu kazanır. Oyunu üç oyuncudan biri kazanacağından, bu üç sayının toplamı 1 etmelidir, yani

$$a + 5a/6 + (5/6)^2a = 1$$

eşitliği geçerli olmalıdır. Bu denklemden kolaylıkla a'yı bulabiliriz:

$$a = 36/91,$$

tahmin ettiğimiz gibi 1/3'ten biraz daha fazla. İkinci oyuncunun kazanma olasılığı da,

$$5a/6 = (5/6) \times (36/91) = 30/91$$

dır, yani 1/3'ten biraz daha az.

Genel Oyun. Ya bu oyunu n kişi oynarsa, her bir oyuncunun oyunu kazanma olasılığı kaçtır?

Birinci oyuncunun kazanma şansına a diyelim. O zaman ikinci oyuncunun kazanma şansı $5a/6$'dır. Üçüncü oyuncunun kazanma şansı da $(5/6)^2a$'dır. Dördüncü oyuncunun kazanma şansıysa $(5/6)^3a$'dır... Bu böyle sürer. n'inci oyuncunun kazanma şansı $(5/6)^{n-1}a$'dır. Oyunculardan biri oyunu kazanmak zorunda olduğundan bu n sayının toplamı 1 olmalıdır, yani,

$$a + (5/6)a + (5/6)^2a + \ldots + (5/6)^{n-1}a = 1$$

eşitliği geçerli olmalıdır. a'yı dışarı alalım:

$$a(1 + 5/6 + (5/6)^2 + \ldots + (5/6)^{n-1}) = 1.$$

Sağ ayraçtaki uzun toplama

$$(1 - (5/6)^n)/(1 - 5/6)$$

sayısına eşittir[2]. Demek ki,

---

2 Genel olarak, x herhangi bir sayıysa, 1+x+x2+...+xn sayısı, (1–xn+1)/(1–x) sayısına eşittir. Bunu şöyle kanıtlayabiliriz: A, bulmak istediğimiz toplam olsun:

$$A = 1 + x + x2 + \ldots + xn.$$

$$a = (1 - 5/6)/(1 - (5/6)^n)$$

dir.

Yukardaki sonuca göre, oyuncu sayısı sonsuz olduğunda, yani n sonsuza gittiğinde, a, 1/6 olur, ki bu da beklenen bir sonuçtur: Oyunda sonsuz oyuncu olduğunda, zar sırası bir daha birinci oyuncuya gelmez ve birinci oyuncu ancak ilk (ve son) atışında şeş atarsa oyunu kazanabilir. İkinci oyuncunun kazanma olasılığı da $5a/6$'dır. Üçüncü oyuncunun kazanma olasılığı, bu sayının 5/6'yla çarpımına eşittir. Genel olarak i'inci oyuncunun kazanma olasılığı $(5/6)^{i-1}a$'dır.

Üçüncü Oyun. Eğer yalnızca şeş atan değil de, şeş ya da penç (6 ya da 5) atan kazansaydı, birinci oyuncunun kazanma olasılığını hesaplamak için,

$$a + 4a/6 = 1$$

denklemini çözmemiz gerekirdi (Yukarda yürüttüğümüz mantıkta 5/6 yerine 4/6 koyalım.) Çözelim: $a = 3/5$ buluruz.

Dördüncü Oyun. Eğer cehar, penç ya da şeş (4, 5 ya da 6) atan kazanacak olsaydı, birinci oyuncunun kazanma olasılığı,

$$a + 3a/6 = 1$$

denkleminin çözümü, yani 2/3 olurdu.

Beşinci Oyun. Eğer se (3), cehar (4), penç (5) ya da şeş (6) atan kazanacak olsaydı, birinci oyuncunun kazanma olasılığı,

$$a + 2a/6 = 1$$

denkleminin çözümü, yani 3/4 olurdu.

Altıncı Oyun. Eğer dü (2), se (3), cehar (4), penç (5) ya da şeş (6) atan kazanacak olsaydı, birinci oyuncunun kazanma olasılığı,

$$a + 1a/6 = 1$$

denkleminin çözümü, yani 6/7 olurdu.

Demek ki, bir zarla oynadığımız bu tür oyunlarda, birinci oyuncunun kazanma olasılıkları 6/11, 3/5, 2/3, 3/4 ve 6/7'dir.

İkinci oyuncunun bu oyunları kazanma olasılığı da (yukardaki sayıları 1'den çıkarın) sırasıyla 5/11, 2/5, 1/3, 1/4 ve 1/7'dir.

Negatif Oyun. Bu oyunların bir de negatifleri vardır. Örneğin, şeş atanın kazandığı oyunun negatifi, şeş atanın kaybettiği oyundur. Şeş atanın kaybettiği oyunda, birinci oyuncunun kazanma olasılığı 5/11'dir.

Şeş ve penç atanın kaybettiği oyunda, birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı 2/5'tir... Yukardaki bölümü anlayan okur bu sonuçları kolaylıkla elde edebilir.

Kazanma olasılığı 1/5 olan bir oyun. Öyle bir zar oyunu bulalım ki, birinci oyuncunun kazanma olasılığı 1/5 olsun.

Bu sayıyı x'le çarpalım:

$$xA = x + x2 + x3 + ... + xn+1.$$

Şimdi de, $A - xA$'yı hesaplayalım. Birçok terim sadeleşir:

$$(1-x)A = A - xA = 1 - xn+1.$$

Burdan da A bulunur.

Soru bu biçimde sorulursa oldukça kolay çözülür: Yek'i (1'i) yok sayın! Birinci oyuncu zar atsın. Eğer 6 gelirse kazansın, eğer 2, 3, 4, 5 gelirse kaybetsin (yani ikinci oyuncu kazansın), eğer 1 gelirse birinci oyuncu gene zar atsın ve oyun böyle sürsün. Yüzde yüz olasılıkla 1 dışında bir zar geleceğinden, sonlu bir zaman sonra ya birinci ya da ikinci oyuncu kazanır. Ve oyunu, birinci oyuncu 1/5 olasılıkla kazanır.

Ama bu oyunda ikinci oyuncu hiç zar atmaz! Pek o kadar neşeli bir oyun değil!

Her iki oyuncunun da zar atacağı bir başka oyun bulmaya çalışalım.

Bulacağımız oyunda, bir oyuncunun her zar atışında (yani bir hamlede) kazanma olasılığına x diyelim. Birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığına da a diyelim. Biz, a'nın 1/5 olmasını istiyoruz elbet.

Birinci oyuncu ilk zarda oyunu kazanamamışsa, ki $1-x$ olasılıkla kazanamaz, sıra ikinci oyuncuya geçer ve ikinci oyuncu bu anda birinci oyuncu konumuna geçer. Demek ki ikinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı $(1-x)a$'dır. Oyunu iki oyuncudan biri kazanacağından,

$$a + (1-x)a = 1$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu denklemden x'i bulalım:

$$x = 2 - 1/a$$

Şimdi, a yerine 1/5 koyacak olursak, $x = -3$ buluruz! Oysa x, 0'la 1 arasında bir sayı olmalı!

Ne yapacağız?

Yoksa böyle bir oyun yok mu?

Var!

Bir an için a yerine 4/5 koyalım. O zaman, $x = 2 - 1/a$ denklemini çözdüğümüzde, $x = 3/4$ buluruz. Hoşumuza gitti bu, çünkü 3/4, 0'la 1 arasında bir sayı. 3/4'ün 27/36'ya eşit olduğunu görmek daha da hoşumuza gitti. Hele hele, iki zar atıldığında bu iki zarın toplamının 4, 5, 6, 7, 8 ya da 9 olma olasılığının 27/36 olması... Ağzımız kulaklarımızda!

Oyuncularımıza şu oyunu oynatalım: Her iki oyuncu da sırayla iki zar atsın. Atılan iki zarın toplamı 4, 5, 6, 7, 8 ya da 9 olursa, o oyuncu oyunu kazansın; olmazsa sıra öbür oyuncuya geçsin. Bu oyunu birinci oyuncunun kazanma olasılığı 4/5'tir.

Ya 1/5'e ne oldu?

Yukardaki oyunun negatifini alalım: İki oyuncu sırayla zar atsın. Atılan iki zarın toplamı 4, 5, 6, 7, 8 ya da 9 olursa, o zarları atan oyuncu oyunu kaybetsin! Bu oyunu birinci oyuncunun kazanma olasılığı 1 – 4/5, yani 1/5'tir.