

Bir Olasılık Sorusu

Ali Nesin

1, 2, 3, ..., 9 sayıları arasından n tane rastgele sayı çekiliyor. (Aynı sayı birkaç kez çekilebilir, yani her çekişten sonra çektiğimiz sayıyı geri koyuyoruz.) Bu n sayının çarpımının 10 'a bölünme olasılığı kaçtır? Eğer $n = 1$ ise, bu olasılık 0 'dır elbette. Ama $n \geq 2$ ise kaçtır?

Seçilen n sayının çarpımının 10 'a bölünmesi için, seçilen sayılardan en az birinin 2 'ye ve en az birinin 5 'e bölünmesi gerekir. Yani sayılardan en az biri 2, 4, 6 ya da 8 olmalı ve en az biri 5 olmalı.

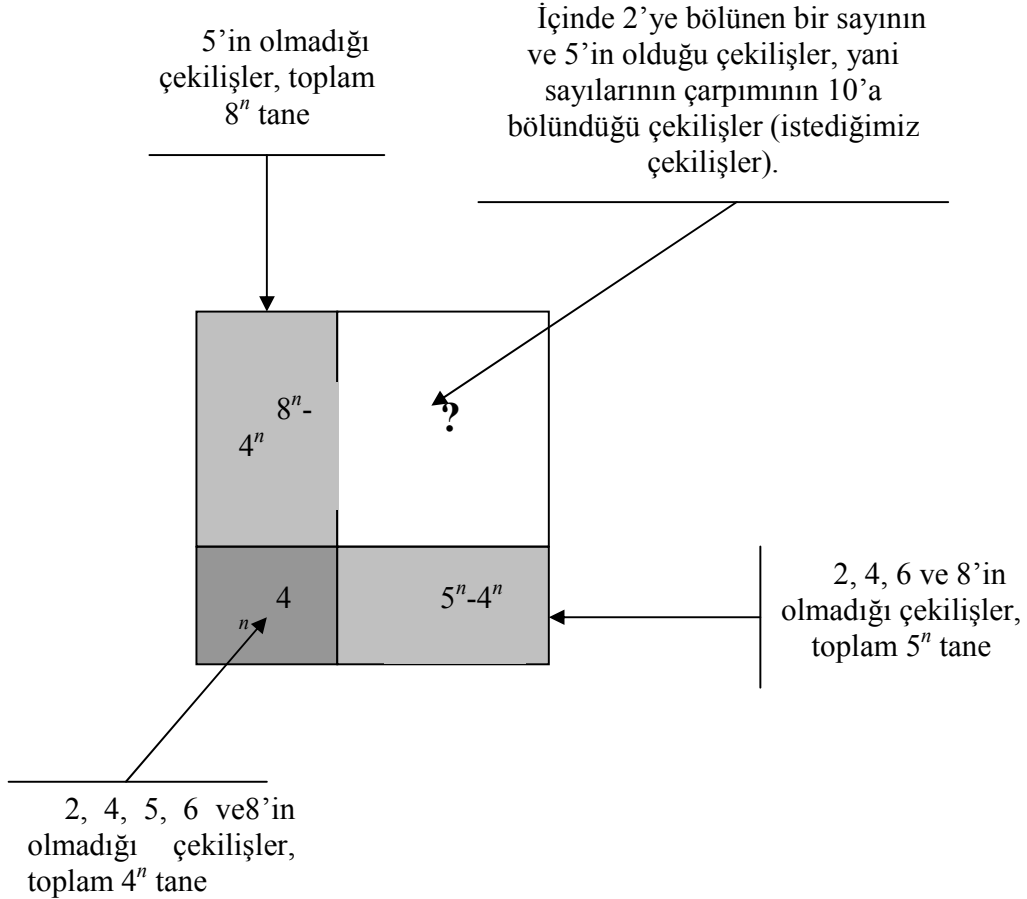
Dört olguya gereksiniyoruz:

A. 9 sayı arasından n sayı seçtiğimizden, toplam olay sayımız 9^n dir.

B. İçinde 2, 4, 6, 8 olmayan olayların sayısı 5^n dir, çünkü geriye 1, 3, 5, 7, 9 (beş tane) sayı kalmıştır.

C. Buna benzer nedenden, içinde 5 olmayan olay sayısı 8^n dir.

D. Yukardaki iki olay kümesinin kesişimi, içinde 2, 4, 5, 6, 8 olmayan olaylar kümesidir ve bu kümede 4^n tane olay vardır.



Yukardaki şekilde özetlediğimiz bu dört olgudan, içinde 5'in ve 2, 4, 6 ve 8'den birinin bulunduğu olay sayısını hesaplayacağız. Yani yukardaki şekildeki “?” ile belirtilen sayının değerini hesaplayacağız.

Toplam 9^n olaydan, $5^n - 4^n$, $8^n - 4^n$ ve 4^n sayılarını çıkarırsak, ilgilendiğimiz olayların sayısını buluruz:

$$9^n - (5^n - 4^n) - (8^n - 4^n) - 4^n = 9^n - 5^n + 4^n - 8^n + 4^n - 4^n = 9^n - 5^n + 4^n - 8^n.$$

Her olayın olasılığı aynı olduğundan ($1/9^n$), rastgele seçilen n sayının çarpımının 10'a bölünmeme olasılığı, bu sayıyla $1/9^n$ nin çarpımı, yani,

$$\frac{9^n - 5^n + 4^n - 8^n}{9^n}$$

dir.