Çekirge Kaç Sıçrar ya da “Rastgele Yürüyüş”

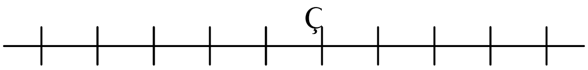
Ali Nesin

Bir çekirge çok ama çok uzun bir yol üstünde. Çekirge öne ya da arkaya 1 metre sıçrayabiliyor. Belli bir olasılıkla öne, belli bir olasılıkla arkaya sıçrıyor. Örneğin, öne ya da arkaya sıçramak için çekirge yazı tura atabilir, yazı gelirse öne, tura gelirse arkaya sıçrayabilir. Ya da zar atabilir, şeş gelirse arkaya, gelmezse öne sıçrayabilir.

Diyelim çekirge p olasılıkla öne, q olasılıkla arkaya sıçradı. Elbette $p + q = 1$’dir. Çekirgenin, bir zaman sonra (yani sonlu bir zaman içinde, ama zaman limiti olmaksızın), örneğin, 1000 metre ileri gitme olasılığı kaçtır?

Çekirge önce arkaya, sonra iki kez öne, sonra beş kez gene arkaya sıçrayabilir. Yani çekirgenin 1000 metrelik yolu birdenbire, dosdoğru gitmesi gerekmez. Bir arkaya, iki öne giderek de 1000 metre öne gidebilir.

En iyisi çekirgeyi bir sayı doğrusu üstünde yol alırken göstermek:



Çekirgenin başlangıçta bulunduğu noktaya sıfır (0) diyelim (Resimde bu nokta Ç harfiyle gösterilmiş.) Öbür noktaları tamsayılarla alışık olduğumuz üzere numaralayalım: Ç’nin solundaki ilk noktaya -1, sağındaki ilk noktaya 1 diyelim...

Çekirge p olasılıkla 1 metre sağa, q olasılıkla 1 metre sola gidiyor. Bir süre sonra çekirgenin 1000 metre sağa gitme olasılığı kaçtır?

Elbette p ne kadar büyükse, çekirgenin 1000 metre sağa gitme olasılığı da o kadar büyüktür.

Örneğin, eğer $p = 1$ ise, yani çekirge hep sağa doğru ilerliyorsa, o zaman yüzde yüz olasılıkla çekirge 1000 noktasına ulaşır (ve tam 1000 sıçrayışta ulaşır.)

Öte yandan $p = 0$ ise, çekirge hep sola gitmek zorundadır ve hiçbir zaman 1000’e varamaz.

Ya $p = 1/2$ ise?

Ya da p başka bir sayıysa? O zaman çekirgenin 1000’e ulaşma olasılığı kaçtır?

Çekirgenin n’ye ulaşma olasılığına x_n diyelim. Yukarda x_{1000}’i sorduk. Eğer $n > 0$ ise, $x_n = x_1^n$ dir. Çünkü çekirgenin n metre sağa gidebilmesi için, çekirgenin n kez 1 metre sağa gitmesi gerekmektedir. Dolayısıyla, sorumuzun yanıtını bulmak için x_1’i hesaplamak yeterlidir.

Çekirge p olasılıkla daha birinci sıçrayışta 1’e ulaşacaktır. Öte yandan q olasılıkla ilk sıçrayışta -1’e gelecektir. Bu ikinci durumda, 1’e gelebilmek için çekirgenin 2 metre sağa sıçrayabilmesi gerekmektedir. Yani, çekirge 1’e ulaşmak için

a) Ya ilk sıçrayışında sağa sıçrayacaktır (p olasılıkla),

b) Ya da ilk sıçrayışında sola sıçrayacaktır (q, yani $1 - p$ olasılıkla) ve bundan sonra iki adım sağa sıçraması gerekecektir (x_2 olasılıkla.)

Demek ki, $x_1 = p + (1 - p)x_2$ eşitliği geçerlidir. Ama $x_2 = x_1^2$. Demek ki,

$$x_1 = p + (1 - p)x_1^2$$

eşitliği geçerlidir.

Bu, ikinci dereceden bir denklemdir:

$$(1 - p)x_1^2 - x_1 + p = 0.$$

Çözelim:

$$0 = (1 - p)x_1^2 - x_1 + p = (1 - x_1)(p - (1 - p)x_1),$$

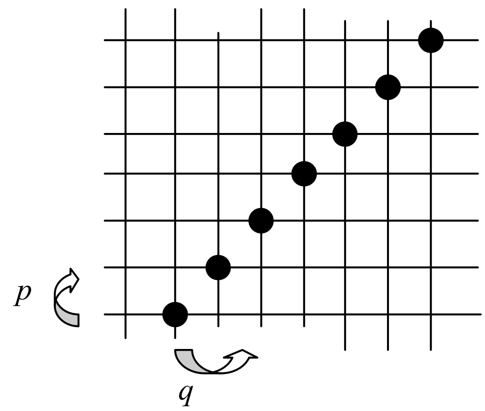
yani

$$\text{ya } x_1 = 1 \text{ ya da } x_1 = \frac{p}{1-p}.$$

Hangisi? Eğer $p \geq 1/2$ ise (yani $p \geq q$ ise), $\frac{p}{1-p} \geq 1$ olduğundan (neden?), bu şıkta doğru yanıt 1'dir. Demek ki, $p \geq 1/2$ ise çekirgenin sonlu (ama belirsiz) bir süre sonra 1'e gelme olasılığı yüzde yüzdür, dolayısıyla 1000'e, yada pozitif herhangi bir sayıya varma olasılığı yüzde yüzdür.

Eğer $p \leq 1/2$ ise, yani $p \leq q$ ise bu olasılık kaçtır? Gene x_1'i hesaplamak yeter elbette. Yukardakinden daha ayrıntılı bir çözümleme (analiz) yapmalıyız.

Aşağıdaki şekle bir göz atalım.



En alt sol noktadan, yani (0, 0) noktasından başlayarak, çekirge doğru üzerinde sola sıçradığında yukardaki şekilde bir adım yukarı çıkalım ($\uparrow$), sağa sıçradığında yukardaki şekilde bir adım sağa gidelim ($\rightarrow$).

(1, 0), (2, 1), (3, 2) gibi, şekilde koyu renkle belirtilmiş noktalara varılırsa, çekirgenin doğru üzerinde 1 noktasına ulaştığı anlaşılır. Örneğin yukardaki şekilde (1, 0) noktasına varılırsa, çekirge hemen, daha ilk hamleden 1 noktasına sıçramış demektir. Eğer (2, 1) noktasına varılırsa, çekirge doğru üzerinde önce bir adım sola ($\uparrow$), sonra iki adım sağa ($\rightarrow$) sıçramış demektir. Eğer (3, 2) noktasına varılırsa, çekirge doğru üzerinde ya sol-sağ-sol-sağ-sağ yapmıştır ya da sol-sol-sağ-sağ-sağ. Yani (3, 2) noktasına iki değişik biçimde ulaşılabilir. (4, 3) noktasına da beş değişik biçimde ulaşır:

sol-sağ-sol-sağ-sol-sağ-sağ = $\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow$
sol-sağ-sol-sol-sağ-sağ-sağ = $\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$
sol-sol-sağ-sağ-sol-sağ-sağ = $\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow$
sol-sol-sağ-sol-sağ-sağ-sağ = $\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$
sol-sol-sol-sağ-sağ-sağ-sağ = $\uparrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$

Genel olarak, çekirge (0, 0) noktasından başlayarak kaç çeşitli yoldan (n + 1, n) noktasına ulaşabilir? Bilmiyorum ve umarsamıyorum ve bilmeyi de arzulamıyorum. Biz gene de bu bilmediğimiz sayıya $f(n)$ diyelim. Örneğin,

$$f(0) = 1$$
$$f(1) = 1$$
$$f(2) = 2$$

$$f(3) = 5$$

(0, 0) noktasından (n + 1, n) noktasına giden her yolda, çekirge n kez sola ($\uparrow$), n+1 kez sağa ($\rightarrow$) gitmelidir. Bunun da olasılığı $q^n p^{n+1}$ dir. Demek ki çekirgenin n kez sola, n + 1 kez sağa giderek 1 noktasına ulaşma olasılığı, $f(n)q^n p^{n+1}$ dir. Dolayısıyla, çekirgenin 1 noktasına ulaşma olasılığı,

$$\text{olas}(p, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n p^{n+1}$$

dir. Eğer $p \geq q$ ise, bu sayının 1 olduğunu biliyoruz. Bunu yukarda hesaplamıştık. Ya $p \leq q$ ise?

Toplumsal infiale yol açabilecek şu eşitliğe bakalım:

$$\text{olas}(p, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n p^{n+1} = \frac{p}{q} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^{n+1} p^n = \frac{p}{q} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) p^n q^{n+1} = \frac{p}{q} \text{olas}(q, p).$$

Eğer $p \leq q$ ise, $q \geq p$ olduğundan ve bu durumda olas(q, p) = 1 olduğundan, yukardaki eşitlikten, eğer $p \leq q$ ise,

$$\text{olas}(p, q) = \frac{p}{q} \text{olas}(q, p) = p/q$$

bulunur.

Demek ki, $p \leq q$ olduğunda, $x_1 = p/q$ imiş. Dolayısıyla $x_{1000} = (p/q)^{1000}$ dir, genellikle oldukça küçük bir olasılıktır bu da...

Bu tür soruyu bir doğru üzerinde değil de bir düzlemde sorabilirsiniz, çekirge kuzeye, güneye, doğuya, batıya sırayabileceği bir düzlemde... Çok daha zor... Bu tür sorular, matematiğin "rastgele yürüyüş" denen alanlarına girer.