Doğumgünleri

Ali Nesin

Bir başkasıyla aynı gün doğmuş olmamıza şaşarız. Bakalım bu ne kadar şaşırtıcı. Bir toplulukta en az iki kişinin aynı doğumgünü olma olasılığını hesaplayalım.

Hesaplarımızı kolaylaştırmak için, 29 şubatı yok sayarak, bir yılda 365 gün olduğunu varsayalım. Örneğin, toplulukta 366 kişi varsa, içlerinden en az ikisinin doğumgünü mutlaka aynı güne rastlayacaktır. 731 kişi varsa, en az üçünün doğumgünü aynı güne rastlayacaktır...

Toplulukta iki kişi varsa, bu iki kişinin aynı gün doğma olasılığı 1/365'tir. Demek ki ayrı günlerde doğma olasılıkları, 364/365'tir.

Eğer toplulukta üç kişi varsa, üçünün de ayrı ayrı doğumgünleri olma olasılığı,

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$$

dir[1]. Eğer toplulukta dört kişi varsa, dördünün de ayrı ayrı doğumgünleri olma olasılığı,

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365}$$

dir. Eğer toplulukta *n* kişi varsa, hepsinin ayrı ayrı doğumgünleri olma olasılığı,

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \ldots \times \frac{366-n}{365}$$

dir. En az iki kişinin aynı gün doğmuş olma olasılığıysa,

$$1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \ldots \times \frac{366-n}{365}$$

Bu sayıların birkaçını bilgisayarıma (aşağı yukarı elbet) hesaplattırdım. İşte sayılar:

Kişi Sayısı	**Olasılık**[2]
2	0,002739727
3	0,008204162
4	0,01635593
5	0,02713561
6	0,04046249
7	0,05623573
8	0,07433534
9	0,09462386
10	0,1169482

---

[1] İkinci kişinin, birinci kişiyle aynı gün doğmaması için, 364 seçeneği vardır. Üçüncü kişiye şimdi 363 seçenek kalmıştır.

[2] En az iki kişinin aynı doğumgünü olma olasılığı.

15	0,2529014
20	0,4114385
22	0,4756954
23	0,5072973
25	0,5686998
30	0,7063163
35	0,8143833
40	0,8912318
50	0,9703736
60	0,9941227
70	0,9991596
80	0,9999143
90	0,9999939
100	0,9999997
103	0,9999999

Görüldüğü gibi 23 kişilik bir toplulukta (örneğin küçük bir sınıfta) en az iki kişinin aynı gün doğmuş olması yüzde elliden daha büyük bir olasılıktır. Elli kişilik bir sınıftaysa, yüzde 97 olasılıkla iki kişinin doğumgünü aynı güne rastlar.

Bu olasılıkları, doğum olasılığının günden güne değişmediğini varsayarak yaptık. Belki de yaz aylarında daha çok doğum olur... O zaman hesaplar biraz daha değişik olur.

Şimdi de doğum olasılıkları aynı olmadığında, aynı günde doğma olasılığının kaç olacağına bakalım.

Savım şu: *Eğer doğumgünü olasılığı eşit dağılmamışsa, yani belli bir günde doğma olasılığı 1/365'ten değişikse, o zaman 2 kişinin aynı gün doğmuş olma olasılığı, yukarda hesapladığımız 1/365 ≈ 0,002739727 sayısından daha büyüktür.*

Benzer bir sav: *İki zar atalım. Zarlar hilesiz olsun. Bu iki zarın aynı sayı olma olasılığı 1/6'dır. Eğer zar hileliyse, o zaman iki kez üstüste aynı zar atma olasılığı 1/6'dan daha büyüktür.*

Örneğin, zar çok hileliyse ve her atışta şeş geliyorsa, iki zarın aynı olma olasılığı 1'dir (yani yüzde yüzdür.) Ya da zarda 1/2 (yüzde 50) olasılıkla penç, 1/2 olasılıkla şeş geliyorsa, o zaman iki zarın aynı olma olasılığı 1/4'tür.

İkinci savı kanıtlayalım. Birinci savın kanıtı da aynı.

Yek (1) gelme olasılığına p_1, dü (2) gelme olasılığına p_2, ... , şeş (6) gelme olasılığına p_6 diyelim. Bu 6 olasılığın toplamı 1'dir elbette.

Her iki zarın da yek gelme olasılığı p_1^2'dir. Her iki zarın da dü gelme olasılığı p_2^2'dir... Her iki zarın da şeş gelme olasılığı p_6^2'dir Dolayısıyla, her iki zarın da aynı sayı gelme olasılığı,

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2$$

dir. Savımız, bu sayının en küçük değeri,

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 1/6$$

de aldığını söylüyor. Bir başka deyişle, eğer p'lerden birinin değeri 1/6'dan değişikse, o zaman, $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2$ sayısının 1/6'dan daha büyük olduğunu söylüyor.

Savımızı kanıtlayalım.

$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2$ teriminde, p'ler arasında bir ayrıcalık yok. Yani terim simetrik. p'lerden ikisinin yerini değiştirirsek, yeni bir terim elde etmeyiz. Dolayısıyla, bu terimi en küçük yapan p'lerden yalnızca bir tane varsa, o zaman p'ler birbirine eşit olmalı, yani (toplamları 1 olduğundan) herbiri 1/6 olmalı.

Demek ki, $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2$ teriminin, en küçük değeri bir tek kez aldığını kanıtlamalıyız.

Diyelim, $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2$ terimi en küçük değeri iki kez alıyor, bir kez

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$$

da, bir kez de,

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$$

da... Yani, bu değere m dersek,

$$a_1^2 + \ldots + a_6^2 = b_1^2 \ldots + b_6^2 = m$$

eşitlikleri geçerli. Şimdi, $p_1^2 + \ldots + p_6^2$ teriminin,

$$\frac{a_1+b_1}{2}, \ldots, \frac{a_6+b_6}{2}$$

de aldığı değerin m'den daha küçük olduğunu kanıtlayacağım. Yani,

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_6+b_6}{2}\right)^2 < m$$

eşitsizliğini kanıtlayacağım. Sol taraftaki terimi hesaplayalım:

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_6+b_6}{2}\right)^2 = \frac{(a_1+b_1)^2 + \ldots + (a_6+b_6)^2}{4}$$

Kareleri açalım, a ve b'lerin karelerinin toplamı yerine m koyalım ve 2'yle sadeleştirelim. Şu terimi elde ederiz.

$$\frac{m + a_1b_1 + \ldots + a_6b_6}{2}$$

Bu terim m'den küçük müdür? Yani,

$$\frac{m + a_1b_1 + \ldots + a_6b_6}{2} < m$$

eşitsizliği geçerli midir? Bu eşitsizliğin geçerli olması için,

$$a_1b_1 + \ldots + a_6b_6 < m$$

eşitsizliği geçerli olmalıdır. Bu son eşitsizliği kanıtlayalım. Bu eşitsizliği kanıtladığımızda, savımız da kanıtlanmış olacak.

a'lardan biri b'lerden birinden değişik olduğundan,

$$(a_1-b_1)^2 + \ldots + (a_6-b_6)^2 > 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Bunu açarsak,

$$(a_1^2-2a_1b_1+b_1^2) + \ldots + (a_6^2-2a_6b_6+b_6^2) > 0$$

buluruz. Yani,

$$2m - (2a_1b_1 + \ldots + 2a_6b_6) > 0,$$

yani,

$$m - (a_1b_1 + \ldots + a_6b_6) > 0,$$

yani,

$$m > a_1b_1 + \ldots + a_6b_6.$$

Bu da kanıtlamak istediğimiz eşitsizlikti.