İlginç Diziler

Ali Nesin

Şu beş terimlik diziye bir göz atın: 2,1,2,0,0.

Birinci sayı,	yani 2,	dizideki 0'ların sayısıdır.
İkinci sayı,	yani 1,	dizideki 1'lerin sayısıdır.
Üçüncü sayı,	yani 2,	dizideki 2'lerin sayısıdır.
Dördüncü sayı,	yani 0,	dizideki 3'lerin sayısıdır.
Beşinci sayı,	yani 0,	dizideki 4'lerin sayısıdır.

Gerçekten ilginç bir dizi... Madem öyle, bu tür dizilere ilginç dizi diyelim. Yani a_0, a_1, ..., a_n dizisinin terimleri,

$$a_i = \text{dizideki } i\text{'lerin sayısı}$$

eşitliğini sağlıyorsa, diziye ilginç dizi diyelim.

Görüldüğü gibi, bir ilginç dizinin terimleri, oluşturdukları ilginç diziden sözediyorlar! Yani bu dizi kendi kendinden sözediyor…

İşte bütün sonlu ilginç diziler:

(2,0,2,0)
(1,2,1,0)
(2,1,2,0,0)
(3,2,1,1,0,0,0)
(4,2,1,0,1,0,0,0)
(5,2,1,0,0,1,0,0,0)
(6,2,1,0,0,0,1,0,0,0)
(7,2,1,0,0,0,0,1,0,0,0)
....
(10,2,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0)
....

Bu böylece sonsuza dek sürer. Yani sonsuz tane sonlu ilginç dizi vardır.

Ve bunlardan başka sonlu ilginç dizi yoktur. Altı terimli (yani 6 uzunluğunda) ilginç dizinin olmaması ilginç dizilerin (belki de 6 sayısının) bir başka ilginç yönü[1].

Başka sonlu ilginç dizinin olmadığı Herb R. Bailey ve Roger G. Lautzenheiser adlı iki matematikçi tarafından kanıtlanmıştır [11]. Bir sayfalık kanıtı bu yazıya almayacağım. Bu yazıda ilginç diziler üzerine iki olgu kanıtlamakla yetineceğim. Bu iki olgu az terimli ilginç dizilerin bulunmasına yardımcı olabilir.

Birinci Olgu. a_0, a_1,...,a_n bir ilginç dizi olsun. Dizide $n + 1$ tane sayı var. İlginç dizinin tanımından dolayı,

$$a_0 = \text{dizideki 0'ların sayısı}$$
$$a_1 = \text{dizideki 1'lerin sayısı}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = \text{dizideki } n\text{'lerin sayısı}$$

eşitlikleri geçerlidir. Eşitliğin solundaki ve sağındaki sayıları toplayalım. Sol tarafta

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

1 Uzunluğu 8 olan ilginç dizileri (aslında diziyi) bulma sorusu İskoçya'da, uzunluğu 11 olan ilginç dizileri bulma sorusu da ABD'de liseler arası yapılan matematik yarışmalarında sorulmuştur.

buluruz elbette. Sağ taraftaki sayıları toplarsak, dizinin terim sayısını, yani $n + 1$, buluruz. Birinci olguyu kanıtladık:

$$a_o + a_1 + ... + a_n = n + 1$$

İkinci Olgu. İkinci olgumuzu kanıtlamak için dizinin terimlerinin toplamını, yani $a_o + a_1 + ... + a_n$ sayısını başka türlü hesaplayacağız. Önce dizideki sıfırları toplayalım! Sıfırlar toplanınca sıfır elde edilir elbet, yani $0 \times a_o$ elde edilir. Şimdi de birleri toplayalım. a_1 tane 1 olduğunu biliyoruz. Demek ki birlerin toplamı $a_1 \times 1$'dir. İkileri toplayalım. a_2 tane 2 olduğunu biliyoruz, demek ki ikilerin toplamı $a_2 \times 2$'dir...

Dizideki sıfırların toplamı = $0 \times a_o$
Dizideki birlerin toplamı = $1 \times a_1$
Dizideki ikilerin toplamı = $2 \times a_2$
....
Dizideki n'lerin toplamı = $n \times a_n$.

Demek ki dizideki sayıların toplamı, yani $a_o + a_1 + ... + a_n$ sayısı, sağdaki sayıların toplamına, yani $0 \times a_o + 1 \times a_1 + ... + n \times a_n$ sayısına eşit. Birinci eşitlik de gözönüne alınınca,

$$0 \times a_o + 1 \times a_1 + ... + n \times a_n = a_o + a_1 + ... + a_n = n + 1$$

eşitliği bulunur.

Bu iki olgu kullanılarak uzunluğu 7 yada küçük diziler biraz hesapla kolaylıkla bulunur. İlginç diziler hakkında daha fazla bilgi için [11]'e başvurabilirsiniz.