Pokerin Matematiği

Ali Nesin

Satrançta bir oyuncunun bilip de öbür oyuncunun bilmediği bilgi yoktur. Bu tür oyunlara **açık oyun** diyelim.

Tavlada da bir oyuncunun bildiğini öbür oyuncu bilir. Birinin öbüründen gizlisi saklısı yoktur. Yani tavla da açık bir oyundur. Öte yandan gelecek zarı her iki oyuncu da bilmez. Demek ki tavla açık bir oyun olmasına karşın her iki oyuncunun da bilmediği bilgiler içerir. Gelecek zar oyuncuların istencinden (iradesinden) bağımsızdır. Bu yüzden tavla şans etkenini içerir. Satrançtaysa şans yoktur. Satranç gerçekten tam iki kişilik bir oyundur. Tavlaysa, zarı da katarsak, iki buçuk kişilik bir oyundur.

Satranç ve tavlanın tersine, kâğıt oyunlarında genellikle bir oyuncunun bilip de öbür oyuncunun bilmediği bilgiler vardır. Örneğin, öbür oyuncunun elindeki kâğıtlar çoğu zaman bilinmez. Demek ki kâğıt oyunları genellikle açık oyun değildir. Ayrıca kâğıt oyunları – tavla gibi – şansı içerirler. Örneğin yerden rastgele çekeceğiniz bir kâğıt olabilir. Bu kâğıdın ne olacağını önceden ne siz kestirebilirsiniz ne de karşınızdaki oyuncu.

Dünya satranç şampiyonu Kasparov'la bir el satranç oynayacak olsanız, yüzde yüz yenileceğinizi önceden kestirebilirsiniz. Kasparov'a karşı hemen hemen hiç şansınız yoktur. Çünkü satrançta şansın bir dirhem etkisi yoktur. En bilgili, en zeki ve en hazırlıklı olan oyuncu kazanır. Kasparov'a karşı satranç oynamanın dünya boks şampiyonuna karşı boks yapmaktan pek bir ayrımı yoktur.

Öte yandan dünya briç şampiyonu bir takımla bir el briç oynayacak olsanız, yenileceğinizden bunca emin olamazsınız. Çok değil, biraz şanslı bir gününüzde, dünya briç şampiyonu takımı yenebilirsiniz. İşte bu yüzden, şans oyunları çoğu kimseye daha çekici gelir. Ama bir şans oyununda bile şansın etkisini bir dereceye kadar azaltabilirsiniz. Örneğin bir kâğıt oyununda, daha önce çıkmış ve o anda görünen kâğıtlar gözönüne alındığında, hangi kâğıdın kaç olasılıkla gelebileceği daha iyi bilebilirsiniz. Bir de öbür oyuncunun stratejisini önsezi ve deneyiminizle tahmin edebilirseniz, küçümsenemeyecek bir bilgiye sahip olabilirsiniz. Bu bilgileri en iyi biçimde kullanana "iyi oyuncu" denir.

Bu yazıda pokeri bahane ederek biraz kombinezon hesabı yapacağız. Kombinezon hesaplarına matematikte ve günlük yaşamda sık sık gereksiniriz. Örneğin poker oynarken...

Poker, dört oyuncuyla ve yediliden asa 32 iskambil kâğıdıyla oynanır. Her oyuncuya önce beş kâğıt dağıtılır, sonra her oyuncu elindeki beş kâğıttan istediği kadarını değiştirebilir (isterse hiç değiştirmez.) Bu değiştirmeden sonra "en iyi" beş kâğıdı olan kazanır. Elbet burda "en iyi" tamlamasının tanımlanması, anlam kazandırılması gerekir. Örneğin, beş kâğıdın beşinin de aynı renkten (örneğin maça, ↔) olduğu bir el çok iyi sayılır. Bu el, iki papaz, iki as ve bir onlu gibi iki çiftten oluşan ellerden daha "iyi" bir eldir. Bunun nedeni bellidir: beş kâğıdın aynı renkten olma olasılığı daha düşüktür.

Aynı renkten beş kâğıtlı ellere **renk** adı verilir. Bu yazıdaki amaçlarımızdan biri de pokerde dağıtılan ilk beş kağıdın renk olma olasılığını hesaplamak. Önce ciddi matematik yapacağız. (*N*e zaman ciddi matematik yapmadık ki!)

Bir tanımla başlayalım. Eğer n bir doğal sayıysa, $n!$ diye yazılan sayı $1 \times 2 \times ... \times n$ sayısına eşittir. Yani, tanımı gereği,

$$n! = 1 \times 2 \times ... \times (n - 1) \times n$$

dir. Örneğin,

$$1! = 1$$
$$2! = 2$$
$$3! = 6$$
$$4! = 24$$
$$5! = 120$$
$$6! = 720$$

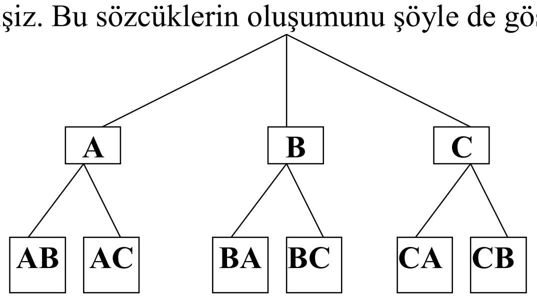
dir. $0! = 1$ olarak tanımlanır. Bu ilk bakışta pek doğal gelmeyen tanımın nedenini yazının ortalarında bulabilirsiniz.

Elimizde A, B ve C harfleri var ve bu harflerden iki değişik harfli (Türkçede ya da başka bir dilde anlamı olması gerekmez) sözcük üretmek istiyoruz. Kaç sözcük üretebiliriz?

Bu soruyu yanıtlamak için sözcükleri – abece sırasına göre – sıralayalım.

AB, AC, BC, BA, CA, CB.

Demek 6 sözcük üretebilirmişiz. Bu sözcüklerin oluşumunu şöyle de gösterebiliriz:



Önce ilk harfleri koyuyoruz: Sırasıyla A, B ve C. Sonra ikinci harfleri: eğer ilk harfimiz A ise, ikinci harf için iki seçeneğimiz var: B ve C. Dolayısıyla A budağına iki dal ekliyoruz: B ve C dallarını. Her üç dal için bunu yaptığımızdan, bu 3 harfle toplam $3 \times 2 = 6$ tane iki değişik harfli sözcük yazabileceğimizi görürüz.

Şimdi bu soruyu genelleştirelim.

Birinci Soru. *Elimizde n değişik harf var:* $A_1, A_2, ..., A_n$ *harfleri. Bu n harften, r değişik harfli sözcükler üretmek istiyoruz (her harfi en çok bir kez kullanabiliriz.) Kaç sözcük üretebiliriz?*

Bu soruya yanıt verebilmek için yukardaki gibi ters dönmüş bir ağaç yapalım. Ağacın ilk budağından aşağıya doğru n dal çıkar:

$$A_1, A_2, ..., A_n$$

dalları. Bunlar sözcüklerin ilk harfleri. Bu dalların uçlarına $n - 1$ dal eklenir (ikinci harfler.) Örneğin A_1 dalına

$$A_2, ..., A_n$$

dalları eklenir. Bu yeni dallar,

$$A_1A_2, ..., A_1A_n$$

sözcüklerini oluştururlar. A_2 dalınaysa,

$$A_1, A_3, ..., A_n$$

dalları eklenir ve,

$$A_2A_1, A_2A_3, ..., A_2A_n$$

sözcüklerini oluştururlar. Böylece $n \times (n - 1)$ dal elde etmiş oluruz. Demek ki iki harfli sözcük sayısı $n \times (n - 1)$ imiş. Ağacı sürdürelim. Yukarda elde ettiğimiz her $n \times (n - 1)$ dala şimdi $n - 2$ dal daha ekleyebiliriz. Örneğin, A_1A_2 dalına,

$$A_3, ..., A_n$$

dallarını ekleyebiliriz. Bu yeni dalların herbirinin ucuna 3 harfli sözcükler yazılır. Böylece $n \times (n - 1) \times (n - 2)$ tane üç harfli sözcük elde ederiz. Bu yöntemi sürdürerek, $A_1, ..., A_n$ harflerinden

$$n \times (n - 1) \times ... \times (n - (r - 1))$$

tane r değişik harfli sözcük yazacağımızı görürüz. Bu sayı da

$$n!/(n - r)!$$

sayısına eşittir (sadeleştirince eşitlik hemen çıkar.) İlk teoremimizi kanıtladık:

Teorem 1. *Eğer $r \le n$ iki doğal sayıysa, $A_1, ..., A_n$ harflerini en çok bir kez kullanarak $n!/(n - r)!$ tane r harfli sözcük yazılır.*

Eğer, yukardaki teoremde r'yi n alırsak, $n!$ buluruz.
Biraz alıştırma yapalım:

1. SELİM sözcüğünün harfleriyle kaç tane üç harfli sözcük yazabiliriz? Yukardaki teoremi uygulayarak $5!/(5 - 3)! = 5!/2! = 5 \times 4 \times 3 = 60$ sözcük buluruz. Başka bir soru: SELİM sözcüğünün harfleriyle kaç tane beş harfli sözcük yazılır? Yine yukardaki teoremi uygulayalım: $5!/(5 - 5)! = 5!/0!$ ve $0! = 1$ eşitliklerini kullanarak, $5! = 120$ tane beş harfli sözcük yazabileceğimizi görürüz.

2. MELEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç tane (beş harfli elbet) sözcük yazabiliriz? Yukardaki teoremi doğrudan uygulayamayız, çünkü iki tane E harfi var. Önce iki E'yi ayıralım ve ME_1LE_2K "sözcüğünün" tüm harflerini kullanarak kaç tane beş harfli sözcük yazabileceğimizi bulalım. Bu sorunun yanıtı yukardaki gibi $5! = 120$'dir. Bu 120 sözcüğün yarısında E_1 harfi E_2 harfinden önce gelir; öbür yarısındaysa E_2 harfi E_1 harfinden önce gelir. Demek ki MELEK sözcüğünün harflerinden $120/2 = 60$ sözcük yazabiliriz.

3. Yukardaki alıştırmaya benzeyen, ama biraz daha zor olan bir alıştırma daha: KELEBEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç sözcük yazabiliriz? Yukardaki yöntemi kullanalım ve önce $K_1E_1LE_2BE_3K_2$ sözcüğünü ele alalım. Bu sözcükten $7!$ sözcük üretebiliriz. Şimdi, $K_1 = K_2$ ve $E_1 = E_2 = E_3$ yapalım. Birinci eşitlik için 2'ye böleriz, ikinci eşitlik içinse $3! = 6$'ya. Demek ki KELEBEK sözcüğünün harflerinin yerini değiştirerek $7!/(2 \times 6) = 420$ sözcük yazabiliriz.

4. Bir maymunun önünde 7 tane harf var: B, E, E, E, K, K, L harfleri. Maymun bu harfleri rastgele sıraya diziyor. Maymunun KELEBEK sözcüğünü yazma olasılığı kaçtır? 1/420'dir, yani 0,0024'ten biraz daha az[1].

Aynı sonucu bir başka türlü de bulabiliriz. B, E, E, E, K, K, L harfleri arasından,

[1] Biraz konumuzun dışına çıkalım: Bir maymun daktilonun karşısına geçse ve rastgele tuşlara bassa... Ve bunu hiç durmamacasına sonsuza değin yapsa... Bir zaman sonra Sheakespeare'in Hamlet'ini olduğu gibi baştan sona yazma olasılığı kaçtır? 1'dir, yani yüzde yüzdür! Bu ilginç ve beklenmedik sonuç, "Shakespeare Maymun muydu" başlıklı yazımızda kanıtlanmıştır.

• K'yı seçme olasılığımız 2/7'dir,
• geri kalan 6 harften (B, E, E, E, K, L) E'yi seçme olasılığımız 3/6'dır,
• geri kalan 5 harften (B, E, E, K, L) L'yi seçme olasılığımız 1/5'tir,
• geri kalan 4 harften (B, E, E, K) E'yi seçme olasılığımız 2/4'tür,
• geri kalan 3 harften (B, E, K) B'yi seçme olasılığımız 1/3'tür,
• geri kalan 2 harften (E, K) E'yi seçme olasılığımız 1/2'dir,
• geri kalan 1 harften (K) K'yı seçme olasılığımız 1'dir.

Bu sayıları çarparsak, yukardaki sonucu 1/420'yi buluruz.

Şimdi yeni bir soru soralım.

İkinci Soru. *Elimizde n öğesi olan bir A kümesi var:*

$$A = \{A_1, ..., A_n\}.$$

$r \leq n$, bir doğal sayı olsun. A kümesinin kaç tane r öğeli altkümesi vardır?

Bu sayıyı hesaplayacağız. Hesaplamak istediğimiz sayıyı $\binom{n}{r}$ olarak yazalım. Bu sayıya (n'de r) adı verilir.

Örnek: $n = 5$ ve $r = 3$ olsun. $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ kümesinin 3 öğeli bütün altkümelerini bulalım:

$$\{A_1, A_2, A_3\}$$
$$\{A_1, A_2, A_4\}$$
$$\{A_1, A_2, A_5\}$$
$$\{A_1, A_3, A_4\}$$
$$\{A_1, A_3, A_5\}$$
$$\{A_1, A_4, A_3\}$$
$$\{A_2, A_3, A_4\}$$
$$\{A_2, A_3, A_5\}$$
$$\{A_2, A_4, A_5\}$$
$$\{A_3, A_4, A_5\}$$

Toplam 10 tane 3 öğeli altküme var. Demek ki $\binom{5}{3} = 10$'muş.

Birinci soruyla arada şu ayrım var: Birinci soruda $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_3A_2$ sözcüklerini ayrı ayrı sayıyorduk; oysa bu sorumuzda sözcüklere değil de harflerden oluşan kümelere bakıyoruz. Hem $A_1A_2A_3$, hem de $A_1A_3A_2$ sözcüklerinin harflerinden $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesi oluşur. Bunun gibi,

$$A_1A_2A_3$$
$$A_1A_3A_2$$
$$A_2A_1A_3$$
$$A_2A_3A_1$$
$$A_3A_1A_2$$
$$A_3A_2A_1$$

sözcüklerinin herbiri $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesini oluştururlar.

İkinci soruyu yanıtlamak için yukardaki örnekten yararlanacağız. Birinci teoreme göre, r değişik harfli sözcük sayısı $n!/(n - r)!$ dir. Bu $n!/(n - r)!$ sözcükten birçoğu aynı kümenin harflerinden oluşurlar. Kaç tanesinin aynı kümenin harflerinden oluştuğunu bulalım. Yine birinci teoreme göre r harfle yazılan $r!$ sözcük olduğuna göre, $n!/(n - r)!$ sözcükten her $r!$ tanesi aynı kümenin harflerinden oluşur. Demek ki, r öğeli altküme sayısını bulmak için $n!/(n-r)!$ sayısını $r!$ sayısına bölmeliyiz:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!/(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

Bulduğumuz bu sonucu daha sonra kullanacağız; bir köşeye yazalım:

Teorem 2. *n öğeli bir kümenin, r öğeli altküme sayısı*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!} \qquad (1)$$

dir.

Bu teoremin kanıtının, $r = 3$ ve $n = 5$ için, bir resmini yapalım:

picture ?? $ pppp

Toplam poker eli sayısı. Şimdi toplam poker eli sayısını hesaplayabiliriz. 32 kâğıttan kaç tane 5 kâğıtlık el çıkar? Yani 32 öğelik bir kümenin kaç tane 5 öğelik altkümesi vardır? Teorem 2'ye göre,

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{27!\ 5!} = \frac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2} = 201.376$$

tane, yani 200 binden fazla poker eli vardır. Ve bu poker ellerinden herbirinin gelme olasılığı aynıdır, yani 1/201.376'dır.

Renk sayısı. Şimdi de kaç tane "renk" eli olduğunu hesaplayalım. Önce kaç tane maça (↔) renkli el olduğunu bulalım. 32 kâğıttan 8 tanesi maça. Bu 8 maçadan 5 tanesini seçeceğiz. Teorem 2'ye göre,

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{3!\ 5!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2} = 56$$

tane salt maça olan el vardır. Toplam dört renk olduğundan (♦, ♥, ♠, ↔), bu sayıyı 4'le çarparsak, toplam renk sayısını buluruz:

$$56 \times 4 = 224.$$

Ama bu sayıdan, toplam "flush" (aynı renkten ve sürekli kâğıtlar) sayısını çıkarmalıyız. Maçalardan oluşan flush'lar, asla (A–7–8–9–10), yediliyle, sekizliyle, dokuzluyla ya da onluyla (10–J–Q–K–A) başlayabilir. Demek maçadan 5 tane flush var ve toplam flush sayısı $5 \times 4 = 20$. Böylece, *gerçek* renk sayısının,

$$224 - 20 = 204$$

olduğunu buluruz. Olasılık olarak düşünürsek, elden renk gelme olasılığı $204/201.376 \approx 0{,}001013$'dır, yani aşağı yukarı binde birdir.

Kare sayısı. Elden kare gelme, yani beş kâğıttan dördünün aynı sayı olma olasılığını bulalım. Önce dört aslı el sayısını bulalım. Dört asın yanına gelebilecek kâğıt sayısı 32 – 4 = 28'dir. Demek 28 tane dört aslı el var. Toplam 8 tür kâğıt olduğundan, $28 \times 8 = 224$ tane kare el vardır.

Bu sayı, renk sayısından biraz daha fazla olduğundan, renk kareyi yener diye düşünebilirsiniz. Nitekim, eğer pokerde kâğıt değiştirme olmasaydı, düşündüğünüz gibi olurdu. Ama kâğıt değiştirme olasılıkları da etkiler. Örneğin, üç ası olan, öbür iki kâğıdını değiştirerek, dört as olma olasılığını arttırır. Bunun gibi eline dört maça gelen, beşinci kâğıdını değiştirerek, renk olasılığını arttırır. Yani pokerin sonundaki olasılıklar, ilk beş kâğıdın olasılıklarından değişiktir. Pokerde rengin kareyi yenip yenmediğini bilmiyorum. Unutmuşum! Zaten ne demişler? "Bir konuyu anlayamıyorsan, o konuda bir yazı yaz. Gene anlamadıysan bir kitap yaz. Hâlâ anlayamıyorsan, kitabını oku!"

Elinde dört maçası olan, maça olmayan kâğıdını değiştirerek kaç olasılıkla rengi yakalayabilir? Hesaplayalım. 32 kâğıdın 5'i elimizde. Demek ki toplam 27 kâğıttan bir kâğıt seçilecek (öbür oyuncuların ellerini bilmiyoruz, onların elinde kâğıt yokmuş gibi hesaplayabiliriz.) Bu 27 kâğıtta 4 tane maça var (toplam maça sayısı 8, ama bu maçalardan 4'ü elimizde.) Demek ki rengi yakalama olasılığımız 4/27'dir, yani 1/7'den daha fazla. Renge çekmeli miyiz? Eğer kâğıt değiştirmek için ortaya 1 lira koymamız gerekiyorsa (bedava kâğıt değiştirilmez pokerde, şansını arttırmanın fiyatını ödemek gerekir) ve kazanacağımız paranın en az 27/4 lira olacağını düşünüyorsak kâğıt çekmeliyiz. Yoksa çekmemeliyiz. Örneğin iki oyuncu oyundan kaçmışsa, büyük bir olasılıkla kâğıt çekmeye değmez. Eğer kâğıt çekmeye karar verecek son oyuncuysak ve bizden önceki üç oyuncu oyuna girmişlerse, o zaman kâğıt çekmeliyiz.

Dolgun el sayısı. Eğer bir elde bir türden 3 tane, bir başka türden 2 tane kâğıt varsa, o ele "dolgun" (full house) denir. Örneğin, 3 as ve 2 papazdan oluşan bir el dolgundur. Dolgun eller oldukça iyi ellerdir. İlk beş kâğıdı dolgun görmenin kendine özgü bir zevki vardır. En azından, hangi kâğıdı değiştireceğim türünden zor sorularla karşılaşılmaz.

Elin dolgun olma olasılığını bulalım. Bu biraz daha zor. Önce 3 as ve 2 papaz gelme olasılığını bulalım. Dört astan üçünü seçeceğiz, yani 4 öğelik bir kümeden 3 öğelik bir altküme seçeceğiz. Teorem 2'ye göre,

$$\binom{4}{3} = 4$$

seçeneğimiz var aslar için. Şimdi de dört papazdan ikisini seçeceğiz. Yine Teorem 2'ye göre,

$$\binom{4}{2} = 6$$

seçeneğimiz var. Demek ki,

$$4 \times 6 = 24$$

tane 3 as ve 2 papazlı el var. 3 papaz ve 2 aslı eller de 24 tane. Yani as ve papazlardan oluşan

$$24 + 24 = 48$$

tane dolgun el vardır. Bu hesaplar salt as ve papazlar için değil, tüm iki tür kâğıtlar için de geçerli. Örneğin yedi ve dokuzlulardan oluşan 48 tane dolgun el vardır. Kaç tane iki tür kâğıt var? Toplam 8 tür var. Bunlardan 2 tür seçeceğiz. Teorem 2'ye göre,

$$\binom{8}{2} = 28$$

tane iki tür var. Demek ki toplam dolgun el sayısı,

$$48 \times 28 = 1344$$

dür.

Üçgen sayısı. Bir elde 3 tane aynı kâğıt varsa, o ele "üçgen" adı verilir. Örneğin AAAKD bir üçgendir. Ama kare ve dolgunlar üçgen sayılmaz. Üçgen sayısını hesaplayalım. Önce 3 aslı üçgen sayısını bulalım. Teorem 2'ye göre,

$$\binom{4}{3} = 4$$

çeşit 3 as seçebiliriz. Bu 3 asın yanına iki kâğıt gelecek, ama herhangi iki kâğıt değil: hiçbiri as olmayacak ve aynı tür kâğıt olmayacaklar. As dışında 32 – 4 = 28 tane kâğıt var. Bunlardan iki tane seçelim:

$$\binom{28}{2} = 378$$

tane seçenek var. Ama bu seçeneklerden bazıları iki aynı tür kâğıttan oluşuyor. Bu sayıyı bulup 378'den çıkartalım. Kaç tane iki papaz seçebiliriz? $\binom{4}{2} = 6$ tane. As dışında yedi tür kâğıt var. Demek ki, 378 seçenekten 6 × 7 = 42 tanesi iki aynı tür kâğıttan oluşuyor. Dolayısıyla, seçilen üç asın yanına,

$$378 - 42 = 336$$

tane iki kâğıtlık el koyabiliriz. Dört çeşit üç as seçilebildiğinden, aslı üçgen el sayısı,

$$336 \times 4 = 1344$$

dür. Bu hesap as dışındaki öbür kâğıtlar için de geçerli olduğundan, üçgen el sayısı,

$$1344 \times 8 = 10.752$$

dir.

Kalan hesapları okura alıştırma olarak bırakıyoruz. Yanıtları aşağıdaki dizelgede bulacaksınız. Matematiksel şeytanınız bol olsun[2].

El türü	**El sayısı**	**Bin üzerine olasılığı (±0,005)**
Flush	5	0,025
Royal		
Flush	20	0,10
Renk	204	1,01
Kare	224	1,11
Dolgun	1.344	6,67
Kent	5.100	25,33
Üçgen	10.752	53,39
İki Çift	24.192	120,13
Bir Çift	107.520	533,93

[2] Bir elin kâğıtları peşpeşeyse, örneğin 7-8-9-10-V ise, ama aynı renkten (örneğin kupa) değilse, o ele "kent" denir (her nedense.)