Ramanujan'ın Aklındaki

Alper Çay, alpercay2000@yahoo.com

Bu yazımızda, sürekli kesirlerin bir uygulaması olarak karşımıza çıkan bir bilmece ve tabi ki onun çözümünden bahsedeceğiz. Konuyu daha iyi anlayabilmek için okurun sürekli kesirler ve Pell denklemi denilen denklem türü hakkında ön bilgiye sahip olması iyi olabilir. Bu amaçla Türkçe kaynak olarak Prof. Dr. Hüseyin Altındiş'in "*Sayılar Teorisi ve Uygulamaları*" isimli kitabından ya da Kenneth H.Rosen'in "*Elementary Number Theory and Its Applications*" adlı kitaplarından faydalanılabilir ki biz de yazımızda bu kitapları biraz karıştırdık.

Belçika'nın Louvain şehrindeki bir sokağın üstündeki ve altındaki evlerin sayıları ile ilgili sorulan ünlü –bir o kadar da tuhaf– bir bilmece vardır. Bu bilmeceye göre sokağın bir tarafındaki ve üzerindeki evlerin sayılarının toplamı, sokağın diğer tarafındaki evlerin toplam sayısına eşittir. (Evler ardışık biçimde numaralandırılmış.) Ayrıca sokaktaki evlerin sayısı 50'den büyük fakat 500'den küçüktür. İşi matematiğe dökersek, bilmecede

$$1+2+\ldots+(m-1)=(m+1)+(m+2)+\ldots+n \qquad (1)$$

eşitliğini ve $50 < n < 500$ eşitsizliğini sağlayan m ve n sayılarının sorulduğunu anlıyoruz.

Yanıtın deneme yanılma yöntemiyle $m = 204$ (ve $n = 288$) olduğunu bulmak zor değildir. Fakat n için herhangi bir sınırlama yokken çözüme nasıl ulaşabiliriz?

Bu problem Ramanujan hakkında bir anekdot da içeren ünlü "*Strand Magazine"* dergisinden gelmektedir. Kanigel, *The man Who Knew Infinity* isimli kitabında [1] bulmacanın Ramanujan'a vatandaşı Mahalanobis tarafından sorulduğunda Ramanujan'ın hemencecik sürekli bir kesir oluşturduğunu anlatır.

Acaba bu sürekli kesir neydi? Maalesef Kanigel bundan bahsetmemiş. İşte bu kısa yazımızda Ramanujan'ın çözümü olduğuna inandığımız çıkarımlarda bulunacağız.

$$\sum_{i=1}^{m-1} i = \sum_{i=m+1}^{n} i \quad \text{veya} \quad \frac{m(m-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{m(m+1)}{2}$$

ise m ve n'nin (1) eşitliğini sağlayacağını gözlemleyelim. Eğer $x = 2n + 1$ ve $y = 2m$ der ve gerekli sadeleştirmeleri yaparsak Pell denklemi olarak bilinen

$$x^2-2y^2=1 \qquad (2)$$

denklemini elde ederiz. Pell denklemi'nin

$$x_{r+1}+y_{r+1}\sqrt{N}=\left(x_1+y_1\sqrt{N}\right)^{r+1}=\left(x\ +y_1\sqrt{N}\right)\left(x_r+y_r\sqrt{N}\right) \qquad (3)$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla çözülebileceği iyi bilinir. [2] Tabii burada öncelikle en küçük çözüm olan (x_1, y_1)'in bulunabilmesi gerekir.

Yine iyi bilinir ki Pell denklemi'nin genel çözümleri $\sqrt{N}$'nin $[a_1, a_2, \ldots]$ sürekli kesrine açılmasıyla yani

$$[a_1,a_2,\ldots]=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}$$

ile elde edilir. (2) denklemi için $\sqrt{2}=[1,2,2,\ldots]$'dir ve her bir ikinci yakınsayan kesir genel çözümleri verir:

$$[1,2]=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ [1,2,2,2]=\frac{17}{12},\ [1,2,2,2,2,2]=\frac{99}{70},\ldots$$

Buradan (x, y) = (3, 2), (17, 12), (99, 70), ... ikililerine ulaşılır. Şimdi ikinci yakınsayandan başlamak üzere bilmecenin genel çözümlerini elde edebiliriz:

$$(m,n) = (6, 8), (35, 19), (204, 288), \ldots$$

Burada *(m, n)* ikililerini elde ederken $m=\dfrac{y}{2}$ ve $n=\dfrac{x-1}{2}$ aldığımıza dikkat ediniz.

Bu kadar açıklamadan sonra pek çok okuyucu Ramanujan tarafından ifade edilen sürekli kesrin [1, 2, 2, ...] olması gerektiğini düşünebilir. Böyle bir düşünce gerçekten oldukça akla yatkındır, fakat burada durmamız gerekmez. Yani bu bir son değildir. Daha da ileri gidebiliriz. (2) deki indirgeme bağıntısını

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ y_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}$$

olarak yazabiliriz. Eğer $x=2n_r+1$ ve $y_r=2m_r$ dersek,

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ y_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ m_r \end{pmatrix}$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi x_r ’yi yok edersek,

$$m_{r+1}=6m_r-m_{r-1} \quad (r \geq 2)$$

indirgeme bağıntısını $m_1=1$ ve $m_2=6$ olmak üzere elde ederiz. Buradan

$$\frac{m_{r+1}}{m_r}=6-\frac{m_{r-1}}{m_r}=5+\frac{m_r-m_{r-1}}{m_r}=5+\cfrac{1}{1+\cfrac{m_{r-1}}{m_r-m_{r-1}}}=5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{m_r}{m_{r=1}}-1}}$$

elde olunur. Sonuç olarak

$$\frac{m_{r+1}}{m_r}=[5,\,1,\,4,\,1,\,4,\,...,\,4,\,1]=5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+...+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1}}}}}$$

sürekli kesri elde edilir.

Dikkat edelim ki bu sürekli kesir aynı zamanda (3) bağıntısındaki $x_1+y_1\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$ eşitliğinin açılımıdır. Son bulduğumuz sürekli kesrin Ramanujan’ın aklındaki sürekli kesir olması gerekir diye düşünüyoruz. En azından buna ikna olmuş durumdayız. Çünkü her bir çift terimdeki yakınsayanlar bize genel çözümü doğrudan vermektedir. Örneğin

$$[5,1]=\frac{6}{1},$$
$$[5,1,4,1]=\frac{35}{6},$$
$$[5,1,4,1,4,1]=\frac{204}{35},$$
$$[5,1,4,1,4,1,4,1]=\frac{189}{204}, \ .....$$

yakınsayanları m = 6, 35, 204, 1189, ... çözümlerini doğrudan verirler. Bu metod tam Ramanujan’a özgü değil mi zaten!

Kaynaklar

1. Poo-Sung Park, *Ramanujan*’s *Continued Fraction for a Puzzle*, The CMJ, November 2005.

2. R.Kanigel,*The Man Who Knew Infinity,*Washington Square Pres, 1991.

3. I. Niven, H. Zuckerman, and H. Montgomery, *An Introduction To The Theory Of Numbers,* Wiley, 1991.