

## Sayılarla İlgili Bir Soru

Ali Nesin

Kesirli sayıları bilirsiniz:  $a$  ve  $b$  tamsayıları için,  $a/b$  biçiminde yazılan sayılara kesirli sayılar denir. Örneğin,  $3/5$ ,  $-2/3$  sayıları kesirli sayılardır.  $5$  de kesirlidir, çünkü  $5$ ,  $5/1$  biçiminde de yazılabilir.

Bir zamanlar, uzun zaman önce, antik Yunan zamanında, her sayının kesirli olduğu sanılırdı. Yanlış! Örneğin  $\sqrt{2}$  kesirli bir sayı değildir. Bunun kanıtı birçok kitapta bulunduğundan ve ben de bu kanıtı daha önce birkaç kez yazdığımdan, burada yinelemeyeceğim. Genel olarak, eğer  $n$  sayısı tam bir kare değilse,  $\sqrt{n}$  kesirli bir sayı olamaz.

Eğer  $a$  ve  $b$  kesirli sayılarsa,  $a^b$  kesirli olmayabilir mi? Elbette olmayabilir. Örneğin  $a = 2$ ,  $b = 1/2$  olsun. O zaman,  $a^b = \sqrt{2}$ 'dir ve kesirli değildir.

Bu kolaydı. Daha zor bir soru: Eğer  $a$  ve  $b$  kesirli değilse,  $a^b$  kesirli olabilir mi?

Yanıt: Evet!

İki şikkımız var:  $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$  ya kesirlidir ya da kesirli değildir.

**Birinci Şık:**  $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$  kesirli bir sayıysa. O zaman bir sorun yok,  $a = b = \sqrt{2}$  olsun. O zaman  $a^b$  kesirli bir sayıdır.

**İkinci Şık:**  $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$  kesirli bir sayı değilse. O zaman da bir sorun yok.  $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$  olsun,  $b = \sqrt{2}$  olsun. Şimdi,  $a^b = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ , ve  $2$  kesirli bir sayıdır.

Güzel değil mi? Ya  $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$  ya da  $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$  kesirli. Hangisinin sorumuzu yanıtladığını bilmiyoruz, ama biri yanıtıyor.