Saymak Sanıldığı Kadar Kolay Değildir

Ali Nesin

Bir matematikçinin bir zamanlar dediği gibi, saymasını bilenler ve bilmeyenler olmak üzere üç tür insan vardır. Bakalım siz hangi türdensiniz? Örneğin bir odada bulunan topları sayabilir misiniz?

Ayşe boş bir odada. Odanın kapısı açık. Murat odanın hemen dışında, kapının önünde. Murat'ın önünde 1, 2, 3, 4,... diye sayılandırılmış sonsuz tane top var. Saat 12'ye 1/2 dakika kala, Murat 1 ve 2 sayılı topları Ayşe'nin bulunduğu odaya atıyor. Ayşe hiç zaman kaybetmeden 1 sayılı topu Murat'a geri gönderiyor. Saat 12'ye 1/4 dakika kala, Murat 3 ve 4 sayılı topları Ayşe'ye atıyor. Ayşe gene hiç zaman kaybetmeden 2 sayılı topu Murat'a geri yolluyor. Saat 12'ye 1/8 dakika kala, Murat 5 ve 6 sayılı topları odaya atıyor. Ayşe bu sırada 3 sayılı topu Murat'a geri yolluyor. Saat 12'ye 1/16 dakika kala Murat 7 ve 8 sayılı topları Ayşe'ye atıyor. Ayşe de 4 sayılı topu Murat'a geri atıyor. Ayşe ve Murat topları böylece birbirlerine atıp duruyorlar.

12'ye 1/2 var	Murat 1 ve 2'yi Ayşe'ye atıyor	Ayşe 1'i Murat'a atıyor
12'ye 1/4 var	Murat 3 ve 4'ü Ayşe'ye atıyor	Ayşe 2'yi Murat'a atıyor
12'ye 1/8 var	Murat 5 ve 6'yı Ayşe'ye atıyor	Ayşe 3'ü Murat'a atıyor
12'ye 1/16 var	Murat 7 ve 8'i Ayşe'ye atıyor	Ayşe 4'ü Murat'a atıyor
12'ye 1/32 var	Murat 9 ve 10'u Ayşe'ye atıyor	Ayşe 5'i Murat'a atıyor
...	...	...
12'ye $1/2^n$ var	Murat $2n–1$ ve $2n$'yi Ayşe'ye atıyor	Ayşe n'yi Murat'a atıyor
...	...	...

Soru: Saat tam 12'de odada kaç top vardır?

Murat'ın ve Ayşe'nin topları gittikçe artan bir hızla atıp atamayacakları sorusuyla ilgilenmeyelim. Fiziksel engelleri ortadan kaldırıp, soruyu soyut düzeyde algılayalım.

Birinci Yanıt: Saat 12'de odada sonsuz tane top vardır. Çünkü Murat odaya hep iki top atmaktadır ve Ayşe odadan yalnızca bir top dışarı atmaktadır. Dolayısıyla odadaki top sayısı her an 1 artmaktadır. Bu yüzden, saat 12'de odada sonsuz tane top vardır.

İkinci Yanıt: Saat 12'de odada hiç top yoktur. Çünkü Ayşe her topu bir zaman sonra Murat'a geri atacaktır. Öyle değil mi? Saat 12'ye $1/2^n$ kala, Ayşe n sayılı topu Murat'a geri fırlatacaktır. Dolayısıyla her top bir zaman sonra odadan çıkacaktır ve saat 12'de odada hiç top kalamaz.

Asıl Soru: Yanıtlarımız birbirleriyle çelişiyor. Hangi yanıt doğru? Hangi yanıt yanlış? Yoksa her iki yanıt da mı yanlış? Öyleyse doğru yanıt nedir? Ve neden?

Asıl Sorunun Yanıtı: Her iki yanıt da doğru gibi gözüküyor. Ama her ikisi de doğru olamaz elbet. Biraz düşünelim.

Birinci yanıtta odadaki top sayısı gözönünde bulunduruluyor. Odadaki top sayısı hep bir arttığından, saat 12'de odadaki top sayısının sonsuz olacağı öne sürülüyor.

İkinci yanıttaysa toplar teker teker gözönüne alınıyor. Her top bir zaman sonra odadan dışarı atılacağından, odada hiç top kalamaz deniliyor.

Doğru yanıt ikincisi. Birazdan ikinci yanıtın neden doğru olduğunu açıklayacağım. Bu paragrafta birinci yanıtın gerekçesinin neden geçerli olmadığını anlatmaya çalışayım. Odadaki top sayısının durmadan arttığı doğru. Bundan hiç kuşkumuz yok. Ancak bu olgu tek başına saat 12'de odada sonsuz tane top olduğunu kanıtlamaz! Odadaki top sayısı her an artabilir ve gene de saat 12'de odada hiç top kalmayabilir! Zaten burda olan da bu: Odadaki top sayısı artıyor ve saat 12'de odada hiç top kalmıyor. Bunun nasıl olduğunu görelim.

İkinci yanıtın neden doğru olduğunu daha iyi anlamak için her an odada bulunan topları yazalım:

Saat	**Odadaki toplar**	**Odadaki top sayısı**
Saat 12'ye 1/2 kaladan hemen sonra	2	1
Saat 12'ye 1/4 kaladan hemen sonra	3, 4	2
Saat 12'ye 1/8 kaladan hemen sonra	4, 5, 6	3
Saat 12'ye 1/16 kaladan hemen sonra	5, 6, 7, 8	4
Saat 12'ye 1/32 kaladan hemen sonra	6, 7, 8, 9, 10	5
Saat 12'ye 1/64 kaladan hemen sonra	7, 8, 9, 10, 11, 12	6
...	...	...
Saat 12'ye $1/2^n$ kaladan hemen sonra	$n + 1, n + 2, ..., 2n$	n
...	...	...

Odadaki topları küme olarak gösterelim. 12'ye $1/2^n$ kaladan hemen sonra odada bulunan topların kümesine A_n diyelim. Demek ki

$$A_1 = \{2\}$$
$$A_2 = \{3,4\}$$
$$A_3 = \{4,5,6\}$$
$$A_4 = \{5,6,7,8\}$$
$$A_5 = \{6,7,8,9,10\}$$
$$A_6 = \{7,8,9,10,11,12\}$$
$$...$$
$$A_n = \{n + 1, n + 2 ,..., 2n\}$$
$$...$$

eşitlikleri geçerli. Bu kümeler dizisinin sonsuzda ne olduğunu bulmak istiyoruz.

A_1 kümesi $\{2,3,4,5,6,...\}$ kümesinin bir altkümesidir.

A_2 kümesi $\{3,4,5,6,7,...\}$ kümesinin bir altkümesidir.

A_3 kümesi $\{4,5,6,7, 8,...\}$ kümesinin bir altkümesidir.

Genel olarak A_n kümesi $\{n + 1, n + 2, n + 3, ...\}$ kümesinin bir altkümesidir.

B_n, n'den büyük tamsayılar kümesini simgelesin. Yani

$$B_n = \{n + 1, n + 2, n + 3,...\}$$

olsun. Demek ki,

$A_1 \subseteq B_1$
$A_2 \subseteq B_2$
$A_3 \subseteq B_3$
$A_4 \subseteq B_4$
$A_5 \subseteq B_5$
...
$A_n \subseteq B_n$
...

tümceleri geçerli. A_n kümelerinin sonsuzda boş olduğunu göstermek için, B_n kümelerinin sonsuzda boş olduğunu göstermek yeterlidir. Ama B_n kümesi n'den büyük sayıları içerdiğinden, her sayı bir zaman sonra B_n'lerden birinin dışında kalır. Örneğin, 1995, B_{1995}'te değildir, B_{1996}'da da değildir; genel olarak, $n \geq 1995$ ise, 1995, B_n'de değildir. Bu dediğimiz yalnız 1995 için değil, her sayı için geçerli. Demek ki B_n kümeleri sonsuzda boşküme olurlar. Dolayısıyla A_n kümeleri de sonsuzda boşküme olurlar.

Burda yaptığımız ikinci yanıtın kanıtını açıklamaktan başka bir şey değil. İkinci yanıtın kanıtı doğrudur, yani ikinci yanıt doğrudur.

Yukardakine benzeyen şu bilmeceyi soralım: Murat Ayşe'ye her saniye iki tane (madeni) 1 lira versin. Ayşe de bu 2 lirayı cebine atsın. Ama Ayşe'nin cebi delik olsun ve cebine her iki lira koyuşunda, bir lira cebinden yere düşsün. Sonsuzda Ayşe'nin cebinde kaç lira olur?

Ayşe'nin cebindeki para her saniye artmaktadır. Çünkü her saniye Ayşe'nin cebine 2 lira girmektedir ve yalnızca 1 lira düşmektedir. Her saniye Ayşe 1 lira daha zenginleşir. Örneğin 10 saniye sonra Ayşe'nin cebinde 10 lira olacaktır, 11 saniye sonra 11 lirası olacaktır... Bundan, Ayşe'nin cebinde sonsuzda sonsuz lira olacağı çıkar mı?

Çıkmaz!

Paraların yere hangi sırayla düştükleri önemlidir. Örneğin, eğer paralar Ayşe'nin cebinden yukardaki gibi teker teker sırayla düşerse, Ayşe'nin cebinde (sonsuzda) hiç para kalmaz. Öte yandan ilk lira Ayşe'nin cebine takılı kalırsa ve sonraki liralar Ayşe'nin cebinden teker teker, **sırayla** düşerse, sonsuzda Ayşe'nin bir lirası olur.

Bir başka örnek verelim: Tek sayılı liralar Ayşe'nin cebine takılı kalırsa ve çift sayılı liralar teker teker düşerse, sonsuzda Ayşe'nin sonsuz parası olur. Hem yerde hem de Ayşe'nin cebinde sonsuz para olur.

Sonuç olarak, Ayşe'nin cebinde sonsuzda herhangi tutarda parası olabilir. Ayşe'nin cebinde kalacak para, liraların hangi sırayla düştüğüne bağlıdır.

Yukardaki problemi biraz zorlaştıralım. Ayşe'nin cebinden paraları rastgele düşürelim. Ayşe'nin cebine giren ilk iki lira, yere düşmek için yazı – tura atsınlar. 1/2 olasılıkla birinci lira düşsün, 1/2 olasılıkla ikinci lira. Bir saniye sonra Ayşe'nin cebine iki lira daha girecek ve böylece cebinde 3 lira olacak. Bu üç liradan biri de 1/3 olasılıkla yere düşsün. Bir saniye sonra Ayşe'nin cebine iki lira daha girecek ve cebinde 4 lira olacak. Bu dört liradan biri de 1/4 olasılıkla yere düşsün... Sonsuza değin bu böyle sürsün. Sonsuzda Ayşe'nin kaç parası olur?

Kimi okur, "Sonsuzda Ayşe'nin cebinde herhangi tutarda parası olabilir, 1 lirası da olabilir, sonsuz parası da olabilir," yanıtını verecektir. Gerçekten de biraz önce bunun böyle olduğunu görmemiş miydik?

Ne yazık ki doğru yanıt bu değil. Ayşe'nin cebinden paralar **rastgele** düşerse, sonsuzda Ayşe'nin **yüzdeyüz olasılıkla** sıfır lirası olacaktır. "Rastgele" sözcüğünün altını özellikle çizdim.

Paralar yere **rastgele** düştüğünde neden Ayşe'nin cebinde sonsuzda hiç para kalmaz?

Ayşe'nin cebine konan paraları sayılayalım. 1 sayılı lirayı, yani birinci lirayı ele alalım. Bu liranın **yüzdeyüz olasılıkla** bir zaman sonra Ayşe'nin cebinden düşeceğini kanıtlayacağım. Yani, birinci liranın Ayşe'nin cebinde sonsuza değin kalma **olasılığının sıfır** olduğunu kanıtlayacağım.

Bu lira, 1/2 olasılıkla daha ilk turda Ayşe'nin cebinden düşecektir. Ve gene 1/2 olasılıkla birinci turda Ayşe'nin cebinde kalacaktır. Demek ki birinci liranın birinci turda düşmeme olasılığı 1/2'dir.

Birinci liranın birinci turda düşmediğini varsayalım. İkinci turda, Ayşe'nin cebinde 3 lira vardır. 1/3 olasılıkla birinci lira düşecektir ve 2/3 olasılıkla düşmeyecektir. Demek ki birinci liranın ne birinci ne de ikinci turda düşmeme olasılığı,

$$1/2 \times 2/3 = 1/3$$

tür.

Birinci liranın ikinci turda da düşmediğini varsayalım. Üçüncü turda Ayşe'nin cebinde 4 lira vardır. Birinci lira 1/4 olasılıkla düşecektir, 3/4 olasılıkla düşmeyecektir. Demek ki birinci liranın ne birinci ne ikinci ne de üçüncü turda düşmeme olasılığı

$$1/2 \times 2/3 \times 3/4 = 1/4$$

tür.

Okur hesapları sürdürebilir. Birinci liranın ilk 4 turda düşmeme olasılığı,

$$1/2 \times 2/3 \times 3/4 \times 4/5 = 1/5$$

tir.

Genel olarak, birinci liranın ilk n turda (yani saniyede) düşmeme olasılığı $\frac{1}{n+1}$'dir.

Bu olasılıklar n büyüdükçe küçülür. Yani, birinci liranın düşmeme olasılığı gittikçe azalır. Bunu zaten biliyorduk. Ama şimdi yeni bir olgu keşfettik: Bu olasılıklar azalır, azalır ve n sonsuza yaklaştıkça, sıfıra yaklaşırlar. Yani birinci liranın hiç düşmeme olasılığı sıfırdır. Dolayısıyla, birinci lira 1 olasılıkla (yani yüzde yüz) sonlu bir zaman sonra düşecektir!

Birinci lirayla yaptığımızı, herhangi bir lirayla da yapabiliriz. Her lira bir zaman sonra 1 olasılıkla düşecektir. Yani sonsuzda Ayşe'nin cebinde hiç para kalmaz (1 olasılıkla!)