Zar Sayısı

Ali Nesin

Tek bir zar atıldığında altı sonuçtan biri elde edilir: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Ya iki zar atıldığında kaç sonuç elde edilir? 36 değil, çünkü, örneğin, 5-3'le 3-5 arasında bir ayrım yapılmaz, bu zarlar bir sayılır (pencüse.) İnanmazsanız sayın:

1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 4-4, 4-5, 4-6, 5-5, 5-6, 6-6.

Ya üç zar atıldığında kaç sonuç elde edilir? Bu birinci soru. Ama bu soru çok kolay...

Dört zar atıldığında ne olur?

Ya beş zar atıldığında?

Ya n zar atıldığında?

Önce yanıtı vereyim... Ama önce düşünün. Kendiniz bulmaya çalışın. Birkaç yanıt bulacaksınız. Zevk alacaksınız. Nihai yanıtı bulamayabilirsiniz. Önemli değil. Bulsanız ne olacak ki! Sanki n zarlı tavla mı oynayacaksınız!

Düşünmek ve düşünmekten zevk almak yanıtı bulmaktan çok daha önemlidir.

Şu anda kitabı kapatın. Kitabı okumayın... Kitabının okunmasını istemeyen ender yazarlardan biriyim, hartta belki de tek yazarım!

Yanıtı veriyorum. Vazgeçtim.... Şimdi vermeyeceğim. Yazının sonunda vereceğim.

n tane zar atacağız. Diyelim a_1 tane 1 geldi, a_2 tane 2 geldi... a_6 tane 6 geldi. Gelen zarları (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) biçiminde gösterebiliriz. Demek ki,

$$\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) : a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = n\}$$

kümesinin eleman sayısını hesaplayacağız.

Şimdi bir numara yapacağım. Yukardaki 6 yerine k yazacağım ve

$$\{(a_1, a_2, \ldots , a_k) : a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n\}$$

kümesinin eleman sayısını hesaplayacağım. Daha kolay olacak! Daha sonra $k = 6$ alacağım. Bu birinci numara. Ve aslında en büyük numara bu, n'yi değiştireceğimize, yani zar sayısını değiştireceğimize zarın yüz sayısını, yani k'yı değiştiriyoruz!

Bu kümeye bir ad verelim: $A(k, n)$. Demek ki,

$$A(k, n) = \{(a_1, a_2, \ldots , a_k) : a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n\}.$$

$A(k, n)$ kümesinin eleman sayısı, k yüzlü n zar atıldığında elde edilen olay sayısıdır. Bu sayıya da $f(k, n)$ diyelim. Asıl amacımız $f(6, n)$ sayısını hesaplamak...

$A(k, n)$ kümeleriyle $A(k + 1, n)$ kümeleri arasında bir ilişki vardır, o da şudur: İkinci kümede birinci kümeden bir fazla sayı ($k + 1$ inci yüz) vardır, o da a_{k+1} sayısıdır ve bu sayı 0'la n arasında değişir! Daha biçimsel bir yazılımla:

$$A(k + 1, n) = \{(a_1, \ldots , a_k, a_{k+1}) : a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = n\}$$

$$= \bigcup\nolimits_{r=0}^{n} \{(a_1, \ldots, a_k, r) : a_1 + \ldots + a_k = n - r\}.$$

Eşitliğin sonundaki kümeler kesişmiyorlar ve herbirinin eleman sayısı $A(k, n - r)$ kümesinin eleman sayısı kadar. Demek ki,

$$f(k + 1, n) = \sum\nolimits_{r=0}^{n} f(k, n-r) = \sum\nolimits_{s=0}^{n} f(k, s).$$

(En sağdaki eşitlik için, $s = n - r$ yapın.) Bunu aklınızda tutun.

İkinci numaraya geldi sıra: $f(k, n)$'ler arasında şöyle bir ilişki var:

$$f(k + 1, n + 1) = f(k, n + 1) + f(k + 1, n).$$

Kanıtlayalım. Biraz önce kanıtladığımız eşitliği (iki kez) kullanacağız.

$$f(k+1, n+1) = \sum_{s=0}^{n+1} f(k,s) = f(k, n+1) + \sum_{s=0}^{n} f(k,s)$$
$$= f(k, n+1) + f(k+1, n).$$

Eşitliğimiz kanıtlandı. Şimdi bir önceki eşitliği unutun ve sadece bunu aklınızda tutun...

Şimdi en son numara... Diyorum ki $f(k, n)$ sayısı $\binom{n+k-1}{k-1}$ sayısına, yani $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$ sayısına eşittir[1]...

Önce $k = 1$ için kanıtlayalım. Bir yandan $f(1, n)$ sayısı bir yüzlü bir zarı n kez attığımızda elde edeceğimiz olay sayısıdır, bu da 1'dir. Öte yandan, $\binom{n+k-1}{k-1}$ sayısı ($k = 1$ iken), $\binom{n}{0}$ sayısına, yani $\frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!}$ = 1'e eşittir... Demek ki iddia ettiğim eşitlik $k = 1$ için doğru.

Şimdi $n = 1$ için kanıtlayayım. Bir yandan $f(k, 1)$ sayısı k yüzlü bir zarı 1 kez attığımızda elde edeceğimiz olay sayısıdır, ki bu da k'dır. Öte yandan, $\binom{n+k-1}{k-1}$ sayısı ($n = 1$ iken), $\binom{k}{k-1}$ sayısına, yani $\frac{k!}{(k-1)!0!} = \frac{k!}{(k-1)!}$ = k'e eşit... Demek ki iddia ettiğim eşitlik $n = 1$ için de doğru.

Dolayısıyla $n + k = 1$ iken eşitlik doğru.

Şimdi eşitliğin $n + k$ sayısı için doğru olduğunu varsayıp, $n + k + 1$ sayısı için kanıtlayalım. Yani,

$$f(k, n) = \binom{n+k-1}{k-1} \text{ ve } f(k+1, n-1) = \binom{n+k-1}{k}$$

eşitliklerini (tümevarım varsayımı) varsayıp,

$$f(k+1, n) = \binom{n+k}{k}$$

eşitliğini kanıtlayalım. Bu kanıt yöntemine "$n + k$ üzerinden tümevarımla kanıt" denir[2]. Biraz önce unutmamanız gerektiğini söylediğim eşitliği ve tümevarım varsayımını kullanarak kanıtlayacağım.

$$f(k+1, n) = f(k, n) + f(k+1, n-1) = \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} + \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} =$$
$$\frac{k(n+k-1)!+n(n+k-1)!}{n!k!} = (n+k-1)!\,\frac{k+n}{n!k!} = \frac{(n+k)!}{n!k!} = \binom{n+k}{k}.$$

Böylece istediğimiz eşitliği

$$f(k, n) = \binom{n+k-1}{k-1}$$

eşitliğini kanıtlamış olduk. Eğer $k = 6$ alırsak, altı yüzlü bir zarı n defa attığımızda olay sayısının $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)/120$ olduğunu görürüz.

---

[1] Bu sayılar, **Matematik ve Oyun** adlı kitabımın *Pokerin Matematiği* adlı yazımda tanımlanmıştır.

[2] Bu kanıt yöntemi, **Matematik ve Oyun** adlı kitabımın *Sonsuz İniş, Sonsuz Çıkış* adlı yazımda açıklanmıştır.